

Klassifikation
netzinvarianter Kollineationen
und
Anwendung eines elliptischen Netzes
in der Dreiecksgeometrie

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

eingereicht an der Universität für angewandte Kunst in Wien

Fach: Mathematik / Geometrie

1. Beurteiler: Prof. Dr. Hans Havlicek / Technische Universität Wien

2. Beurteiler: Prof. Dr. Georg Glaeser / Universität für angewandte Kunst Wien

vorgelegt von

Thomas Backmeister

Wien, im März 2012

Ich erkläre hiermit,

dass ich die Dissertation selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und mich auch sonst keiner unerlaubten Hilfen bedient habe,

dass diese Dissertation bisher weder im In- noch im Ausland (einer Beurteilerin / einem Beurteiler zur Beurteilung) in irgendeiner Form als Prüfungsarbeit vorgelegt wurde,

dass dieses Exemplar mit der beurteilten Arbeit übereinstimmt.

Datum:

Unterschrift:

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Räumliche Kollineationen mit invariantem elliptischen Netz	4
1.1 Vorbemerkungen und Bezeichnungen	4
1.2 Die reelle Möbiusebene und ihre Einbettung in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$	6
1.3 Elemente der Liniengeometrie	8
1.4 Das elliptische Netz \mathcal{E}	13
1.5 Die Leitgeraden des elliptischen Netzes \mathcal{E}	15
1.6 Möbius-Transformationen	17
1.7 Erweiterung von Möbius-Transformationen	23
1.8 Netzerhaltende Kollineationen	27
1.9 Cliffordsche Schiebungen	29
1.10 Transitivität der netzerhaltenden Kollineationen	31
1.11 Klassifikation der netzerhaltenden Kollineationen	33
2 Die elliptische Netzprojektion	45
2.1 Elliptisches Netz und Bildebene	45
2.2 Die Netzbilder von Punkten, Ebenen und Geraden	47
3 Elliptisches Netz und Dreiecksgeometrie	60
3.1 Bezeichnungen und Hilfssätze	60
3.2 Durch Raumgeraden definierte Parabeln	63
3.3 Die Brocard-Gerade eines Dreiecks	79
3.4 Die harmonisch Konjugierten der Brocard-Geraden	94
3.5 Ausblicke	99

Literaturverzeichnis	102
Abbildungsverzeichnis	103
Symbolverzeichnis	105
Sachverzeichnis	107

Einleitung

Diese Arbeit gliedert sich in zwei Hauptteile. Im ersten Teil handelt es sich um eine Klassifizierung der Menge aller jener Kollineationen des projektiven Raumes $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, die eine vorgegebene lineare Kongruenz in sich überführen. Im zweiten Teil wird die Anwendungsmöglichkeit einer solchen linearen Kongruenz in der Dreiecksgeometrie untersucht.

Der erste Hauptteil hat seinen Ausgangspunkt im Begriff der reellen Möbiusebene. Ihr wohl geläufigstes Modell ist die projektive komplexe Gerade $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) =: \mathbb{C}_\infty$ bzw. die affine Anschauungsebene \mathbb{R}^2 , die durch einen unendlich fernen Punkt ∞ konform abgeschlossen wird. Das für diese Untersuchung wichtigere Modell ist jedoch eines, das durch eine Einbettung von \mathbb{C}_∞ in den projektiven Raum $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ mittels eines elliptischen Netzes \mathcal{E} zustande kommt: jedem Punkt der Möbiusebene entspricht genau ein Strahl aus \mathcal{E} . Letzteres wird in den Abschnitten 1.2 bis 1.4 als elliptisches Drehnetz mit der Achse z eingeführt, wobei in Abschnitt 1.3 auch ein kurzer Einblick in die Liniengeometrie gegeben wird.

Nach einer Beschreibung der Leitgeraden des elliptischen Netzes \mathcal{E} innerhalb des komplexen projektiven Raumes $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ in Abschnitt 1.5 schauen wir in Abschnitt 1.6 auf die Gruppe der bijektiven Transformationen der reellen Möbiusebene, die sogenannten Möbius-Transformationen. Diese unterteilen sich in die Untergruppe der gleichsinnigen und in die Menge der gegensinnigen Transformationen. Die ersteren sind die Projektivitäten von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, die zweiten nennt man auch Anti-Projektivitäten. Innerhalb beider Klassen dieser bijektiven Transformationen bestimmen wir Vertretersysteme, indem als Unterscheidungskriterium die Art der Fixpunktmenge zu Grunde gelegt wird.

In Abschnitt 1.7 kommt das Modell des elliptischen Netzes \mathcal{E} als reelle Möbiusebene ins Spiel. Wir zeigen, wie man jede Möbius-Transformation in \mathbb{C}_∞ zu einer “gleichsinnigen” bzw. “gegensinnigen” Kollineation in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ “hochziehen” kann, nämlich in dem Sinne, dass eine solche Kollineation die Strahlen aus \mathcal{E} in gleicher Weise transformiert, wie dies durch die “darunter liegende” Möbius-Transformation für die Punkte aus \mathbb{C}_∞ geschieht.

Im folgenden Abschnitt 1.8 stellt sich heraus, dass jede Kollineation, die das elliptische Netz \mathcal{E} in sich transformiert, aus einer Möbius-Transformation durch das zuvor erwähnte “Hochziehen” erhalten werden kann. Der Beweis stützt sich im Wesentlichen auf die imaginären Leitgeraden des elliptischen Netzes.

Ein Spezialfall einer netzerhaltenden Kollineation ist die sogenannte “Cliffordsche Schiebung”. Sie läßt jeden Strahl des elliptischen Netzes \mathcal{E} unverändert, d.h. bewirkt lediglich eine Verschiebung der projektiven Punkte auf jedem Netzstrahl. Eine Cliffordsche Schiebung ist durch den Bildpunkt eines Punktes eindeutig bestimmt (Sektion 1.9).

Die übrigen netzinvarianten Kollineationen sind durch die Angabe der Bildstrahlen dreier verschiedener Netzstrahlen und durch den Bildpunkt eines Punktes eindeutig bestimmt. Diese Transitivität, die der Transitivität der Möbius-Transformationen entspricht, zeigen wir in Abschnitt 1.10.

Ausgehend von den Äquivalenzklassen der gleich- und gegensinnigen Möbius-Transformationen, die in Sektion 1.6 aufgestellt wurden, kommen wir in Abschnitt 1.11 zu einer Klassifizierung der das elliptische Netz \mathcal{E} invariant lassenden Kollineationen. Dabei werden die “über” einer Äquivalenzklasse von Möbius-Transformationen liegenden netzinvarianten Kollineationen in weitere Äquivalenzklassen unterteilt.

Zur Vorbereitung für den zweiten Hauptteil dieser Arbeit geben wir in Kapitel 2 einen Überblick über die elliptische Netzprojektion. Die Strahlen des elliptischen Netzes \mathcal{E} sind paarweise windschief und jeder Punkt und jede Ebene des $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ist inzident mit genau einem Strahl aus \mathcal{E} . Somit hat jeder Punkt und jede Ebene ein eindeutig bestimmtes Bild in der Bildebene $\mu : z = 0$. Die Bilder von Geraden sind Möbiuskreise, die gewöhnliche Kreise sind, wenn die Geraden nicht parallel zu μ sind. Das Doppelverhältnis bleibt bei der Netzprojektion invariant.

Die Bildebene μ kann sowohl als Möbiusebene als auch als affine Ebene, projektiv abgeschlossen durch den unendlich fernen Netzstrahl s_∞ , angesehen werden.

Es werden einige grundlegende Entsprechungen zwischen Beziehungen von Elementen in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ und denen ihrer Bilder in μ zusammengestellt. Dazu gehören in der Bildebene der Schnitt von Kreisen, die Berührung von Kreis und Gerade, Lotfußpunkte auf Geraden, Winkel zwischen zwei Geraden, Orthogonalität usw. und die dazu äquivalenten oder notwendigen Tatsachen im projektiven Raum. Dabei spielt neben der Netzprojektion auch die Normalprojektion entlang des auf μ senkrechten Netzstrahles eine Rolle.

Mit Hilfe der eben erwähnten Beziehungen zwischen räumlichen Gesetzmäßigkeiten und denen in der Bildebene mittels Netzprojektion sind wir in Kapitel 3 in der Lage, konkrete Beispiele der Dreiecksgeometrie daraufhin zu untersuchen. Wir beginnen in Abschnitt 3.2 mit einem Dreieck in μ und einer Raumgeraden g und beobachten, was sich durch die Bewegung eines Punktes auf g mittels Netzprojektion in μ ergibt. Es ergeben sich Parabeln, die sich durch spätere Spezialisierung der Raumgeraden als die sogenannten Artzt-Parabeln erweisen. Es werden Parabeltangente, Parabelbrennpunkt, Tangentenberührungspunkte, Scheiteltangente usw. durch entsprechende Konstruktionen im projektiven Raum beschrieben.

Die eben erwähnte Spezialisierung der Raumgeraden ist durch ein Dreieck eindeutig be-

stimmt (wenn man von der Lage des Dreiecks in μ absieht). Sie wird über das elliptische Netz \mathcal{E} definierte sogenannte Netzstrahlebenen erzeugt. Diese Gerade erweist sich als zentral für die weiteren Betrachtungen: mit räumlichen Mitteln wird gezeigt, dass ihr Schnittpunkt mit der Bildebene der Lemoinesche Punkt des Dreiecks ist. Ihre Netzprojektion ist der Brocard-Kreis des Dreiecks. Diese Gerade bekommt also von da an die Bezeichnung "Brocard-Gerade".

Im folgenden Abschnitt 3.3 betrachten wir zwei symmetrisch zur Bildebene gelegene Punkte auf der Brocard-Geraden o , deren Netzprojektion die Brocardschen Punkte des Dreiecks sind. Interessant ist vielleicht, wie durch diese räumliche Gerade o so verschiedene Punkte wie Lemoinescher Punkt und die Brocardschen Punkte zu einer Einheit zusammentreten, die allein in der Ebene betrachtet nicht so überschaubar zu Tage tritt.

Weiters läßt sich wiederum mit räumlichen Methoden mittels des elliptischen Netzes zeigen, wie durch die beiden Brocardschen Punkte die identen Brocardschen Winkel am Dreieck vorhanden sind. Man kann an dieser Stelle deutlich sehen, wie das Rechnen mit Winkeln in der affinen Bildebene μ (ohne Ferngerade) durch die Abstände von zu μ parallelen Geraden ausdrückbar ist.

Es folgt eine zweite Charakterisierung der Brocard-Geraden eines Dreiecks durch Teilverhältnisse gewisser Punkte auf den Dreieckseiten und eine Aussage über die Identität der Schwerpunkte bestimmter Dreiecke mit jenem des Ausgangsdreieck, wobei nochmals die Artzt-Parabeln in Betracht kommen.

Der vorletzte Abschnitt des 3. Kapitels handelt von den harmonisch Konjugierten der Brocard-Geraden und deren Zusammenhang mit dem Tangentialdreieck eines Dreiecks. Es läßt sich via elliptisches Netz recht einfach zeigen, dass das Tangentialdreieck eines Dreiecks zu diesem perspektiv ist, wobei der Lemoinesche Punkt das Perspektivitätszentrum ist.

Zum Abschluss folgen einige Ausblicke auf weitere Fragestellungen, die sich im Laufe der Untersuchungen ergeben haben.

An dieser Stelle danke ich dem Betreuer dieser Arbeit, Herrn Prof. Dr. Hans Havlicek von der Technischen Universität Wien sehr herzlich für die vielen Anregungen und Diskussionen. Sie haben mir geholfen, auf einem guten Weg zu bleiben, wo oftmals Gelegenheiten zum Abschweifen gegeben waren. Das Ziel dieser Arbeit war es ja, ein elliptisches Netz und die zugehörige Projektion dazu zu verwenden, um Phänomene im projektiven Raum mit solchen in einer Ebene in einen Zusammenhang zu bringen bzw. solche Zusammenhänge aufzuzeigen. Ich hoffe, dass es mir einigermaßen gelungen ist, die Stärken dieser Methode für weitere Fragestellungen in ein interessantes Licht zu rücken.

Weiters danke ich Herrn Prof. Dr. Georg Glaeser von der Universität für angewandte Kunst in Wien und allen seinen Mitarbeitern an der Abteilung für Geometrie für ihre Unterstützung im Umgang mit dem Programmpaket Open Geometry GL. Mit diesem wurden sämtliche Bilder dieser Arbeit generiert.

Kapitel 1

Räumliche Kollineationen mit invariantem elliptischen Netz

1.1 Vorbemerkungen und Bezeichnungen

1.1.1 Wir wollen in diesem Abschnitt Kollineationen im projektiven Raum $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ betrachten, die ein gewisses elliptisches Netz (eine elliptische lineare Strahlenkongruenz) als Menge invariant lassen, d.h. die Menge der Strahlen des Netzes soll bijektiv auf sich abgebildet werden. Zum Studium solcher Kollineationen gehen wir aus von der reellen Möbiusebene und deren Transformationen. Diese Ebene läßt sich in die Geradenmenge von $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ einbetten. Es wird sich zeigen, daß sich jede Möbius-Transformation der Möbiusebene zu einer netzerhaltenden Kollineation erweitern läßt und dadurch auch alle solche Kollineationen erfaßt werden.

1.1.2 Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Wir führen folgende Notationen ein:

$$\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$$

Zeilenvektor

$$\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1}$$

Spaltenvektor

$$\mathbf{x}\mathbb{K}, \mathbf{o} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{K}^{n+1}$$

Punkt in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

$$\mathbf{u}^T\mathbb{K}, \mathbf{o} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{K}^{n+1}$$

Hyperebene in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

$$\{\mathbf{x}\mathbb{K} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid \mathbf{x} = (1, x_1, \dots, x_n)\}$$

Menge der eigentlichen Punkte in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

$$\{\mathbf{x}\mathbb{K} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid \mathbf{x} = (0, x_1, \dots, x_n)\}$$

Menge der unendlich fernen Punkte in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$

$A \cdot B$	Produkt zweier Matrizen $A, B \in M_{n+1}(\mathbb{K})$
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}^T$	Skalarprodukt zweier Vektoren in \mathbb{K}^{n+1}
$P \vee Q$	Verbindungsgerade zweier Punkte P, Q in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$
$P \vee g$	Mit einem Punkt P und einer Geraden g inzidente Ebene

Für die Inzidenz zwischen einem Punkt $\mathbf{x}\mathbb{K}$ und einer Hyperebene $\mathbf{u}^T\mathbb{K}$ gilt:

$$\mathbf{x}\mathbb{K} \in \mathbf{u}^T\mathbb{K} \Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}^T = 0.$$

Die Verbindungsgerade zweier Punkte $\mathbf{x}\mathbb{K}, \mathbf{y}\mathbb{K}$ ist gegeben durch:

$$\mathbf{x}\mathbb{K} \vee \mathbf{y}\mathbb{K} = \{X \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid X = (s\mathbf{x} + t\mathbf{y})\mathbb{K}, (0,0) \neq (s,t) \in \mathbb{K}^2\}.$$

1.1.3 Ist $(\mathbf{b}_0\mathbb{K}, \dots, \mathbf{b}_n\mathbb{K}, (\sum \mathbf{b}_i)\mathbb{K})$ ein projektives Koordinatensystem in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, so wird durch eine Matrix $A \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ eine Kollineation

$$\alpha : (\mathbf{b}_0\mathbb{K}, \dots, \mathbf{b}_n\mathbb{K}, (\sum \mathbf{b}_i)\mathbb{K}) \mapsto (\mathbf{b}_0A\mathbb{K}, \dots, \mathbf{b}_nA\mathbb{K}, (\sum \mathbf{b}_i)A\mathbb{K})$$

in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ bestimmt.

Das projektive Koordinatensystem $(\mathbf{b}_0\mathbb{K}, \dots, \mathbf{b}_n\mathbb{K}, (\sum \mathbf{b}_i)\mathbb{K})$ ist Bild des kartesischen Standard-Koordinatensystems $(\mathbf{e}_0\mathbb{K}, \dots, \mathbf{e}_n\mathbb{K}, (\sum \mathbf{e}_i)\mathbb{K})$ mittels einer Kollineation mit Abbildungsmatrix $B \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$:

$$(\mathbf{e}_0\mathbb{K}, \dots, \mathbf{e}_n\mathbb{K}, (\sum \mathbf{e}_i)\mathbb{K}) \mapsto (\mathbf{e}_0B\mathbb{K}, \dots, \mathbf{e}_nB\mathbb{K}, (\sum \mathbf{e}_i)B\mathbb{K}).$$

Sind nun $\mathbf{x}\mathbb{K}$ die homogenen Koordinaten eines Punktes $\mathbf{p}\mathbb{K} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ bzgl. $(\mathbf{b}_0\mathbb{K}, \dots, \mathbf{b}_n\mathbb{K}, (\sum \mathbf{b}_i)\mathbb{K})$, also $\mathbf{p} = x_0\mathbf{b}_0 + \dots + x_n\mathbf{b}_n$, so ist auch vermöge der Koordinatentransformation

$$\mathbf{x}\mathbb{K} \mapsto (\mathbf{x}BAB^{-1})\mathbb{K}$$

eine Kollineation in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ bestimmt, die mit α übereinstimmt, wenn $(\mathbf{x}BAB^{-1})\mathbb{K}$ als homogene Koordinaten des Bildpunktes $\mathbf{p}'\mathbb{K}$ von $\mathbf{p}\mathbb{K}$ bzgl. $(\mathbf{b}_0\mathbb{K}, \dots, \mathbf{b}_n\mathbb{K}, (\sum \mathbf{b}_i)\mathbb{K})$ aufgefaßt werden.

Die mit der Kollineation α übereinstimmende Koordinatentransformation einer Hyperebene bzgl. des projektiven Koordinatensystems $(\mathbf{b}_0\mathbb{K}, \dots, \mathbf{b}_n\mathbb{K}, (\sum \mathbf{b}_i)\mathbb{K})$ ist gegeben durch

$$\mathbf{u}^T\mathbb{K} \mapsto (\mathbf{u}(BA^{-1}B^{-1})^T)^T\mathbb{K}.$$

Wird das projektive Koordinatensystem $(\mathbf{b}_0\mathbb{K}, \dots, \mathbf{b}_n\mathbb{K}, (\sum \mathbf{b}_i)\mathbb{K})$ nicht explizit genannt, so ist immer das homogene kartesische Standard-Koordinatensystem $(\mathbf{e}_0\mathbb{K}, \dots, \mathbf{e}_n\mathbb{K}, (\sum \mathbf{e}_i)\mathbb{K})$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ gemeint.

Dann vereinfachen sich die obigen mit α übereinstimmenden Punkt- und Hyperebenen-Koordinatentransformationen zu

$$\mathbf{x}\mathbb{K} \mapsto (\mathbf{x}A)\mathbb{K}$$

bzw.

$$\mathbf{u}^T\mathbb{K} \mapsto (\mathbf{u}(A^{-1})^T)^T\mathbb{K}.$$

1.1.4 Der \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^n läßt sich zu einem \mathbb{C} -Vektorraum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ erweitern, der isomorph zu \mathbb{C}^n ist (siehe z.B. [3]). Eine \mathbb{R} -linear unabhängige Familie von Vektoren in \mathbb{R}^n ist unter dieser Einbettung \mathbb{C} -linear unabhängig in \mathbb{C}^n . Dies führt zur kanonischen Einbettung von $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, d.h. jedem Punkt $\mathbf{x}\mathbb{R} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ist der Punkt $\mathbf{x}\mathbb{C} \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ eineindeutig zugeordnet. Entsprechendes gilt für Geraden, Ebenen usw. Ist also z.B. eine Menge \mathcal{G} von Geraden in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ gegeben, so ist klar, was unter “ \mathcal{G} in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ” gemeint ist.

1.2 Die reelle Möbiusebene und ihre Einbettung in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

In diesem Kapitel betrachten wir zunächst ein Standardmodell der reellen Möbiusebene. Für ein genaueres Studium sei etwa auf [11] verwiesen. Im Anschluss daran wird ein alternatives Modell dieser Ebene innerhalb des reellen projektiven Raumes $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ vorgestellt und dessen Zusammenhang mit dem ersten Modell erläutert.

1.2.1 Die reelle Möbiusebene ist definiert als die projektive komplexe Gerade

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{(z_0, z_1)\mathbb{C} \mid (0, 0) \neq (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2\}.$$

Wir bezeichnen sie auch mit

$$\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \{(1, z)\mathbb{C} \mid z \in \mathbb{C}\} \cup \{(0, 1)\mathbb{C}\}.$$

Der Kürze wegen schreiben wir für Punkte in \mathbb{C}_∞ bisweilen z und meinen damit $z = (1, z)\mathbb{C}$ oder $z = \infty$.

Es ist

$$\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \subseteq \mathbb{C}_\infty.$$

Identifizieren wir den Körper \mathbb{C} mit den Punkten der Anschauungsebene $\mu_0 := \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ und wird diese mit einem einzigen zusätzlichen Punkt, dem Fernpunkt ∞ , abgeschlossen, so erhält man ein Anschauungsbild für die reelle Möbiusebene $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Eine weitere Anschauung der reellen Möbiusebene erhalten wir durch die sogenannte stereographische Projektion, bei der die Punkte von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, interpretiert als Punkte in $\mu_0 \cup \{\infty\}$, auf die Punkte der Einheitssphäre S_1 in \mathbb{R}^3 abgebildet werden. Das Bild eines Punktes $P \in \mu_0$ ist der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von P und $N := (0, 0, 1)$ (Nordpol) mit der Oberfläche der Einheitskugel S_1 . Das Bild des Fernpunktes ∞ ist N selbst.

Auf dem Sphärenmodell S_1 der reellen Möbiusebene wird nun die (unendliche) Schnittmenge einer Ebene mit der Sphäre bezeichnet als ein Möbiuskreis. Möbiuskreise sind also zunächst einfach Kreise auf der Einheitssphäre S_1 . Wird ein Möbiuskreis mittels stereographischer Projektion in die Ebene $\mu_0 \cup \{\infty\}$ zurücktransformiert, so ist dessen Bild entweder eine Gerade oder ein gewöhnlicher Kreis, je nachdem, ob der Nordpol N im Möbiuskreis enthalten ist oder nicht. Wir können also sagen:

Definition 1.2.2 Im Anschauungsmodell $\mu_0 \cup \{\infty\}$ ist die Menge der Möbiuskreise die Menge aller Geraden vereinigt mit der Menge aller Kreise.

Innerhalb der Möbiusgeometrie läßt sich also sagen:

Bemerkung 1.2.3 Durch drei verschiedene Punkte geht genau ein Möbiuskreis.

1.2.4 Mit Hilfe eines weiteren Modells der reellen Möbiusebene $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ erhalten wir einen Zusammenhang mit dem dreidimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$:

Wir ordnen jedem Punkt $(z_0, z_1)\mathbb{C} \in \mathbb{C}_\infty$ eine Gerade in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ zu:

$$(z_0, z_1)\mathbb{C} \mapsto \begin{cases} (1, x, y, 0)\mathbb{R} \vee (0, -y, x, 1)\mathbb{R} & \text{für } (z_0, z_1)\mathbb{C} = (1, x + yi)\mathbb{C} \\ (0, 1, 0, 0)\mathbb{R} \vee (0, 0, 1, 0)\mathbb{R} & \text{für } (z_0, z_1)\mathbb{C} = (0, 1)\mathbb{C} \end{cases} \quad (1.1)$$

Diese Funktion ist injektiv. Denn hätten zwei eigentliche Punkte in \mathbb{C}_∞ eine gemeinsame Bildgerade, so müßte diese in der Ebene $x_3 = 0$ von $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ liegen, was aber nur für die ∞ -ferne Gerade dieser Ebene der Fall ist.

Wir bezeichnen die Bildmenge der Abbildung 1.1 mit \mathcal{E} und die dort definierte Abbildung mit $\Psi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathcal{E}$.

Aufgrund der Injektivität von Ψ kann also die Menge \mathcal{E} von Geraden¹ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ als Modell der reellen Möbiusebene \mathbb{C}_∞ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ angesehen werden.

¹Geraden werden i. F. auch Strahlen genannt.

Für alles Weitere innerhalb dieses Kapitels notieren wir spezielle Strahlen in \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} g_0 &:= \Psi(0) = (1, 0, 0, 0)\mathbb{R} \vee (0, 0, 0, 1)\mathbb{R}, \\ g_1 &:= \Psi(1) = (1, 1, 0, 0)\mathbb{R} \vee (0, 0, 1, 1)\mathbb{R}, \\ g_\infty &:= \Psi(\infty) = (0, 1, 0, 0)\mathbb{R} \vee (0, 0, 1, 0)\mathbb{R}, \\ g_i &:= \Psi(i) = (1, 0, 1, 0)\mathbb{R} \vee (0, -1, 0, 1)\mathbb{R}. \end{aligned}$$

1.2.5 Wir wollen die eben definierte Abbildung Ψ noch auf eine zweite Art beschreiben. Dazu betrachtet man die folgende Funktion vom \mathbb{C} -Vektorraum \mathbb{C}^2 in den \mathbb{R} -Vektorraum \mathbb{R}^4 :

$$\psi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad (1.2)$$

$$(z_0, z_1) := (x_0 + y_0i, x_1 + y_1i) \mapsto (x_0, x_1, y_1, y_0). \quad (1.3)$$

Mit Hilfe von ψ läßt sich die Menge der Punkte eines Strahles in \mathcal{E} angeben:

$$\mathcal{E} \ni \Psi((z_0, z_1)\mathbb{C}) = \{(\psi(az_0, az_1))\mathbb{R} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid a \in \mathbb{C}^\times\}. \quad (1.4)$$

Man kann also sagen:

Bemerkung 1.2.6 Mittels ψ werden die Repräsentanten eines projektiven Punktes in $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ abgebildet auf die projektiven Punkte des zugeordneten Netzstrahles.

1.3 Elemente der Liniengeometrie

Wir benötigen im weiteren Verlauf Begriffe und Tatsachen der Liniengeometrie, die hier in Kürze und größtenteils ohne Beweise zusammengestellt werden. Zur Vertiefung siehe z.B. [12].

Definition 1.3.1 Zu einer Menge A von Geraden in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ heißt

$$T(A) := \{g \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid g \cap a \neq \emptyset \forall a \in A\} \quad (1.5)$$

die Menge der *Treffgeraden*² an A .

Wir schreiben kurz: $T(T(A)) =: T^2(A)$ und $T(\{a_1, \dots, a_n\}) =: T(a_1, \dots, a_n)$.

Definition 1.3.2 Sind a, b, c drei paarweise windschiefe Geraden in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, so nennt man die Treffstrahlenmenge $R := T(a, b, c)$ eine *Regelschar*. Die Menge $L := T(R)$ nennt man die zu R gehörende *Leitschar*. Die Elemente von R bzw. L heißen *Regelgeraden* bzw. *Leitgeraden*.

²auch Treffstrahlen genannt.

Satz 1.3.3 Ist R eine Regelschar und $L := T(R)$ die zugehörige Leitschar, so gelten:

1. R und L enthalten je nur paarweise windschiefe Geraden und $R \cap L = \emptyset$.
2. R und L sind beides Regelscharen. Es ist $R = T(L) = T^2(R)$, $L = T(R) = T^2(L)$. Insbesondere ist also jede Schar die Leitschar der anderen.
3. Für je drei Geraden $r_1, r_2, r_3 \in R, l_1, l_2, l_3 \in L$ ist $L = T(r_1, r_2, r_3)$, $R = T(l_1, l_2, l_3)$. Für drei paarweise windschiefe Geraden a, b, c ist $T^2(a, b, c) =: (a, b, c)$ die einzige Regelschar, die a, b, c enthält.

Bemerkung 1.3.4 Die Regelschar (a, b, c) nennen wir “die von a, b, c aufgespannte Regelschar”.

Lineare Strahlenkongruenzen werden als Fixstrahlengebilde gewisser Kollineationen eingeführt. Dazu zunächst

Definition 1.3.5 Eine Kollineation (ungleich Identität) in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ heißt *geschart*, wenn sie eine Regelschar R aus Fixstrahlen besitzt.

Der Charakterisierung gescharter Kollineationen dienen die folgenden drei Sätze. Zunächst

Definition 1.3.6 Eine Kollineation in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ heißt *zentral*, wenn sie eine Fixpunktebene und ein Fixebenenbündel besitzt.

Satz 1.3.7 Eine Kollineation ζ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ist genau dann *zentral*, wenn jede Gerade g ihr Bild $\zeta(g)$ trifft.

Satz 1.3.8 Besitzt eine nicht zentrale Kollineation β in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ in jedem Punkt oder in jeder Ebene eine Fixgerade, so ist sie *geschart*. Für jede Gerade l , die windschief zu $\beta(l)$ ist, bilden die l treffenden Fixgeraden eine Regelschar $R(l)$.

Die Umkehrung des letzten Satzes gilt auch:

Satz 1.3.9 Jeder Punkt und jede Ebene einer gescharten Kollineation β tragen mindestens einen Fixstrahl, und zwar genau einen, wenn sie nicht einer Fixpunktgeraden von β angehören.

Satz 1.3.10 Sei β eine gescharte Kollineation und \mathcal{S} die Menge ihrer Fixstrahlen. Dann tritt genau einer der drei folgenden Fälle ein:

1. β hat weder Fixpunkte noch Fixebenen. Je zwei Fixstrahlen sind windschief. $T(\mathcal{S}) = \emptyset$ und jeder Punkt bzw. jede Ebene in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ist inzident mit genau einem Strahl aus \mathcal{S} .
2. Es gibt eine Gerade t , deren Punkte und Ebenen genau die Fixpunkte bzw. Fixebenen von β sind. Es ist $\{t\} = T(\mathcal{S})$ und

$$\mathcal{S} = \bigcup \{T^2(t, r) \mid r \in R\},$$

eine Vereinigung von Strahlenbüscheln, wobei $R \subset \mathcal{S}$ eine beliebige Regelschar aus Fixstrahlen von β ist, die t als Leitgerade hat.

3. Es gibt zwei windschiefe Geraden u, v , deren Punkte und Ebenen genau die Fixpunkte bzw. Fixebenen von β sind. Es ist $\{u, v\} = T(\mathcal{S} \setminus \{u, v\})$ und

$$\mathcal{S} \setminus \{u, v\} = T(u, v).$$

Definition 1.3.11 In Entsprechung zu den Fällen von Satz 1.3.10 nennt man

1. \mathcal{S} eine *elliptische (lineare) Kongruenz*³,
2. \mathcal{S} eine *parabolische (lineare) Kongruenz*; mit der Leitgeraden t und
3. $\mathcal{S} \setminus \{u, v\}$ eine *hyperbolische (lineare) Kongruenz*; mit den Leitgeraden u, v .

Bemerkung 1.3.12 Wenn wir im Folgenden von linearen Kongruenzen \mathcal{S} sprechen, so ist im hyperbolischen Fall immer “ \mathcal{S} ohne die beiden Leitgeraden” gemeint!

In den Fällen 2 und 3 des Satzes 1.3.10 ist jede solche Menge \mathcal{S} (im Fall 2 zu einer Regelschar R mit einer Leitgeraden t , im Fall 3 zu windschiefen Geraden u, v) eine parabolische bzw. hyperbolische Kongruenz.

Satz 1.3.13 (a) Zu einer Regelschar R mit Leitschar L und einer weiteren Geraden $a \notin R$ gibt es genau eine lineare Kongruenz $\mathcal{S} := \mathcal{S}(R, a)$, die R und a enthält. Ihre Leitgeraden sind genau $T(\mathcal{S}) = L \cap T(a)$.

(b) Sind $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ lineare Kongruenzen und $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$, so ist $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$.

(c) Eine lineare Kongruenz \mathcal{S} ist “Büschel- und Regelschar-abgeschlossen”, d.h. \mathcal{S} enthält mit zwei sich treffenden Geraden das ganze davon aufgespannte Büschel, mit drei paarweise windschiefen Geraden die ganze davon aufgespannte Regelschar.

Für jeden der drei Typen einer linearen Kongruenz sei nun ein konkretes Beispiel gegeben:

1. Elliptische Kongruenz:

Sei β die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

³oder ein *elliptisches Netz*.

gehörende Kollineation in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Dann hat $\text{Det}(A - \lambda E) = (\lambda^2 + 1)^2 = 0$ keine reelle Lösung, also β keinen Fixpunkt und keine Fixebene. Wegen $A^2 = -E$ ist β^2 die Identität. Somit ist die Menge der Fixgeraden von β genau

$$\mathcal{S} = \{P \vee \beta(P) \mid P \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})\}.$$

Nach Satz 1.3.8 ist β geschart. Je zwei verschiedene Fixgeraden sind windschief, $T(\mathcal{S}) = \emptyset$, jeder Punkt P bzw. jede Ebene ε ist inzident mit genau einem Strahl aus \mathcal{S} (ε ist inzident mit Fixstrahl $\varepsilon \cap \beta(\varepsilon)$). \mathcal{S} ist eine elliptische Kongruenz.

2. Parabolische Kongruenz:

Sei β die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

gehörende Kollineation in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Die Gleichung $\text{Det}(A - \lambda E) = 0$ hat die Lösung $\lambda = 1$ und man findet, dass $t := e_0\mathbb{R} \vee e_1\mathbb{R}$ die einzige Fixpunkte- und Fixebengerade von β ist. Für jeden Punkt $P \notin t$ hat die Gerade $P \vee \beta(P)$ einen Punkt mit t gemeinsam und ist somit eine Fixgerade von β . Die Fixstrahlmenge von β ist also

$$\mathcal{S} = \{P \vee \beta(P) \mid P \notin t\}.$$

Da β nicht zentral ist, ist β nach Satz 1.3.8 eine gescharte Kollineation und \mathcal{S} eine parabolische Kongruenz.

3. Hyperbolische Kongruenz:

Sei β die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

gehörende Kollineation in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Hier sind die beiden Geraden $u = e_0\mathbb{R} \vee e_1\mathbb{R}$ und $v = e_2\mathbb{R} \vee e_3\mathbb{R}$ die einzigen Fixpunkte- und Fixebengeraden von β , wie man sich wiederum durch Lösen der entsprechenden Eigenwertaufgabe leicht klar macht (die Eigenwerte sind 1 und -1). Durch jeden Punkt P , der nicht auf u und nicht auf v liegt, geht die Fixgerade $P \vee \beta(P)$. Da β nicht zentral ist, ist β nach Satz 1.3.8 eine gescharte Kollineation (harmonische Spiegelung an u und v) mit Fixstrahlmenge

$$\mathcal{S} = \{P \vee Q \mid P \in u, Q \in v\}.$$

\mathcal{S} ist eine hyperbolische Kongruenz.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die Unterscheidung der drei Typen linearer Kongruenzen als verschiedenartige Fixstrahlmengen gescharter Kollineationen auch in Hinsicht der projektiven Äquivalenz sinnvoll ist.

Satz 1.3.14 *Für jede Projektivität (Kollineation oder Korrelation) φ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ist $\varphi(\mathcal{S})$ eine Kongruenz vom selben Typ wie \mathcal{S} .*

Die Umkehrung gilt ebenso. Dazu zunächst die folgenden beiden Hilfssätze:

Lemma 1.3.15 *Seien R und R' zwei Regelscharen in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ und L bzw. L' die zugehörigen Leitscharen. Weiters seien $\rho : R \rightarrow R'$ und $\lambda : L \rightarrow L'$ zwei Projektivitäten. Dann gibt es genau eine Kollineation φ , für die gilt:*

$$\varphi|_R = \rho \text{ und } \varphi|_L = \lambda.$$

Lemma 1.3.16 *Ist \mathcal{S} eine elliptische oder eine hyperbolische Kongruenz, so gibt es eine eindeutig bestimmte involutorische gescharte Kollineation, die \mathcal{S} erzeugt (gemäß Satz 1.3.10).*

Bemerkung 1.3.17 Man nennt die zu einer elliptischen bzw. hyperbolischen Kongruenz eindeutig existierende Involution “elliptische” bzw. “hyperbolische gescharte Involution”

Satz 1.3.18 *Sind \mathcal{S} und \mathcal{S}' zwei lineare Kongruenzen in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ vom selben Typ, so sind sie projektiv äquivalent, d.h. es gibt eine Kollineation φ mit $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$.*

Beweis. Wir behandeln zuerst den hyperbolischen Fall:

Seien u, v die windschiefen Leitgeraden der Kongruenz \mathcal{S} und u', v' jene der Kongruenz \mathcal{S}' . Dann lassen sich auf u und v je zwei verschiedene Punkte P_1, P_2 bzw. P_3, P_4 sowie ein weiterer Punkt P_5 so finden, dass P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ein projektives Koordinatensystem darstellen (oder anders gesagt: die fünf Punkte haben allgemeine Lage, bilden einen Rahmen). Analog lassen sich fünf Punkte $P'_1, P'_2, P'_3, P'_4, P'_5$ in allgemeiner Lage finden, von denen $P'_1, P'_2 \in u'$ und $P'_3, P'_4 \in v'$. Durch die Vorschrift $P_i \mapsto P'_i$ für $i = 1, \dots, 5$ wird eine Kollineation φ definiert, für die $\varphi(u) = u'$ und $\varphi(v) = v'$ gilt und somit auch $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$ erfüllt ist.

Nun der parabolische Fall:

Die Kongruenz \mathcal{S} habe die Leitgerade t und enthalte die Regelschar R , entsprechend habe \mathcal{S}' die Leitgerade t' und enthalte die Regelschar R' . Ist L die Leitschar von R und L' jene von R' , so sei $\lambda : L \rightarrow L'$ eine beliebige Projektivität mit $\lambda(t) = t'$. Weiters sei $\rho : R \rightarrow R'$ eine beliebige Projektivität (eindeutig bestimmt durch drei Paare zugeordneter Regelstrahlen). Nach Lemma 1.3.15 gibt es eine Kollineation φ mit $\varphi(t) = t'$ und $\varphi(R) = R'$. Somit ist aber auch $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$.

Zuletzt zum elliptischen Fall:

Gemäß Lemma 1.3.16 und Bem. 1.3.17 sei β die zur Kongruenz \mathcal{S} gehörige elliptische gescharte Involution. Weiters sei $R \subset \mathcal{S}$ eine Regelschar mit zugehöriger Leitschar L und $\eta := \beta|_L : L \rightarrow L$ die durch β auf L induzierte elliptische Involution.

Entsprechend seien zur Kongruenz \mathcal{S}' die elliptische gescharte Involution β' sowie $R' \subset \mathcal{S}'$, L' und $\eta' := \beta'|_{L'} : L' \rightarrow L'$ definiert.

Sei nun (l_a, l_b, l_c, l_d) eine harmonische Darstellung der elliptischen Involution η , d.h. $\eta(l_a) = l_c, \eta(l_b) = l_d$ und $l_a, l_b, l_c, l_d \in L$ liegen harmonisch zueinander. Dasselbe gelte für ein Quadrupel (l'_a, l'_b, l'_c, l'_d) bzgl. η' .

Wir definieren eine Projektivität $\lambda : L \rightarrow L'$ vermöge $\lambda(l_a) := l'_a, \lambda(l_b) := l'_b, \lambda(l_c) := l'_c$. Wegen der harmonischen Lage von l_a, l_b, l_c, l_d und l'_a, l'_b, l'_c, l'_d ist $\lambda\eta = \eta'\lambda$ auf L .

Eine zweite Projektivität $\rho : R \rightarrow R'$ sei irgendwie definiert.

Nach Lemma 1.3.15 gibt es genau eine Kollineation φ mit $\varphi|_L = \lambda$ und $\varphi|_R = \rho$. Daraus folgt, dass $\varphi\beta = \beta'\varphi$ auf L . Für ein $r \in R$ gilt: $\varphi(\beta(r)) = \varphi(r) = \rho(r) = \beta'(\rho(r)) = \beta'(\varphi(r))$, also auch $\varphi\beta = \beta'\varphi$ auf R . Nochmals mit Lemma 1.3.15 (Eindeutigkeit der Kollineation) folgt schließlich, dass $\varphi\beta = \beta'\varphi$ auf $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Für eine Gerade $s \in \mathcal{S}$ gilt $\beta(s) = s$, also $\beta'(\varphi(s)) = \varphi(\beta(s)) = \varphi(s)$, d.h. $\varphi(s)$ ist ein Fixstrahl von β' und somit Element von \mathcal{S}' . Es ist also $\varphi(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}'$. Mit Satz 1.3.14 und Satz 1.3.13(b) folgt $\varphi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}'$. \square

1.4 Das elliptische Netz \mathcal{E}

Sei \mathcal{E} die in Abschnitt 1.2 definierte Strahlenmenge. Dann gilt:

Satz 1.4.1 *Jeder Punkt und jede Ebene in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ist inzident mit genau einem Strahl aus \mathcal{E} .*

Beweis. Ist $P := (a, b, c, d)\mathbb{R} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ und

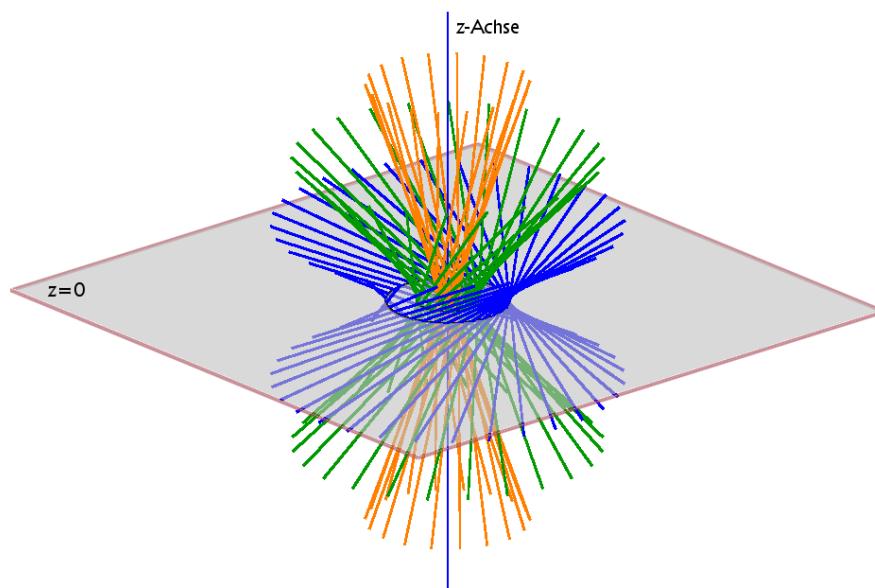
$$P_n := (a + di, b + ci)\mathbb{C} \in \mathbb{C}_\infty, \quad (1.9)$$

so liegt P auf dem Strahl $\Psi(P_n) \in \mathcal{E}$. Einen weiteren Strahl $\in \mathcal{E}$ durch P kann es wegen (1.4) nicht geben.

Ist $\varepsilon := (a, b, c, d)^T\mathbb{R}$ eine Ebene in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ und

$$\varepsilon_n := (-b + ci, a - di)\mathbb{C} \in \mathbb{C}_\infty, \quad (1.10)$$

so liegt der Strahl $\Psi(\varepsilon_n) \in \mathcal{E}$ in der Ebene ε , wie man nachrechnet. Einen weiteren Strahl aus \mathcal{E} , der in ε liegt, kann es nicht geben, da sonst durch den Schnittpunkt mit dem ersten Strahl zwei Strahlen $\in \mathcal{E}$ liefern. \square

Abbildung 1.1: Das elliptische Netz \mathcal{E}

Satz 1.4.2 Die Strahlenmenge \mathcal{E} ist eine elliptische lineare Kongruenz. (Abb. 1.1).

Beweis. Sei β die zur Matrix

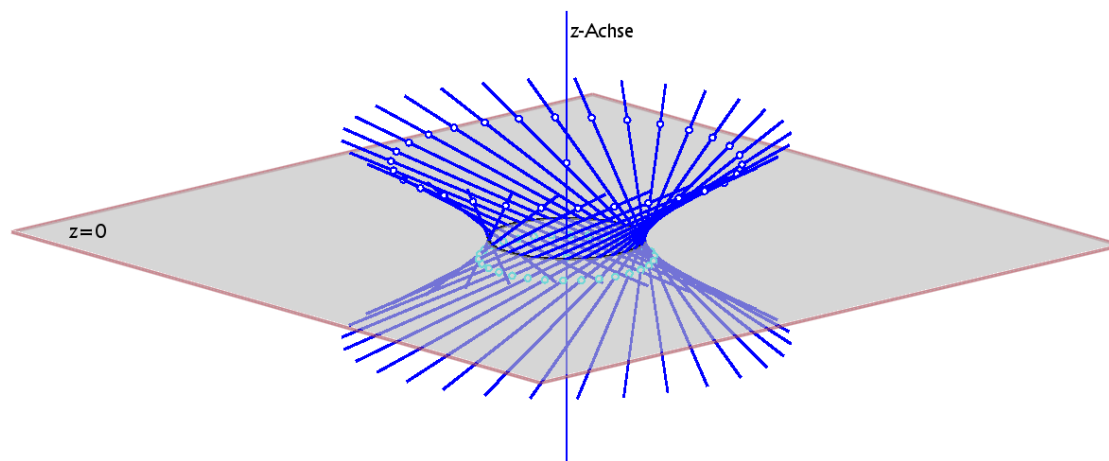
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

gehörende Kollineation in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. β hat keine Fixpunkte in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ und ist also auch keine zentrale Kollineation. In jedem Punkt und in jeder Ebene besitzt β einen Strahl aus \mathcal{E} (Satz 1.4.1) als Fixstrahl (leicht zu prüfen). Nach Satz 1.3.8 ist β somit eine gescharte Kollineation. Wegen der Abwesenheit von Fixpunkten und Fixebenen ist β vom elliptischen Typ (Satz 1.3.10) mit Fixstrahlenmenge \mathcal{E} . Letztere ist also eine elliptische lineare Kongruenz.

□

Es sei bemerkt, daß die im Beweis benutzte Kollineation β ein Spezialfall von Kollineationen ist, die wir in Abschnitt 1.9 ausführlicher behandeln werden.

Sie ist involutorisch und bildet die xy -Ebene ab auf die unendlich ferne Ebene in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. In der Abbildung 1.2 werden die Punkte einer xy -parallelen Ebene entlang der zugehörigen Netzstrahlen aus \mathcal{E} verschoben.

Abbildung 1.2: Beweis des Satzes 1.4.2; die Kollineation β

1.5 Die Leitgeraden des elliptischen Netzes \mathcal{E}

Eine hyperbolische Kongruenz besitzt in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ zwei windschiefe Leitgeraden, durch die sie eineindeutig bestimmt ist (siehe Satz 1.3.10). Genau dasselbe ist der Fall für eine elliptische Kongruenz, wenn man sich diese eingebettet denkt in den komplexen projektiven Raum $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$: darin hat \mathcal{E} zwei eindeutig bestimmte komplexe windschiefe Leitgeraden u und v . Wir zeigen, dass die Menge der komplexen projektiven Punkte je einer dieser Leitgeraden in Bijektion steht zur Strahlenmenge des elliptischen Netzes \mathcal{E} in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Satz 1.5.1 *Die Leitgeraden u, v von \mathcal{E} in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ haben die Gestalt*

$$u = (1, 0, 0, -i)\mathbb{C} \vee (0, 1, -i, 0)\mathbb{C}, \quad (1.12)$$

$$v = (1, 0, 0, i)\mathbb{C} \vee (0, 1, i, 0)\mathbb{C}. \quad (1.13)$$

Beweis. g_0, g_1, g_∞ und g_i seien die in 1.2.4 definierten Netzstrahlen. L_1 sei die Leitschar von $R_1 := (g_0, g_1, g_\infty)$, L_2 die Leitschar von $R_2 := (g_0, g_1, g_i)$. Nach Satz 1.3.13(a) ist \mathcal{E} durch R_1 und g_i eindeutig bestimmt und $T(\mathcal{E}) = L_1 \cap T(g_i) = L_1 \cap L_2$.

Eine Darstellung der Leitschar L_1 ergibt sich, indem man für den Punkt $X = (r, r, s, s)\mathbb{R} \in g_1$ (wobei $(0, 0) \neq (r, s) \in \mathbb{R}^2$) die Ebenen $g_0 \vee X$ mit g_∞ und $g_\infty \vee X$ mit g_0 schneidet und so die beiden Punkte $(0, r, s, 0)\mathbb{R} \in g_\infty$ bzw. $(r, 0, 0, s)\mathbb{R} \in g_0$ erhält.

Analog kommt man zu einer Darstellung der Leitschar L_2 .

Es ist demnach

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(r, 0, 0, s)\mathbb{R} \vee (0, r, s, 0)\mathbb{R} \mid (0, 0) \neq (r, s) \in \mathbb{R}^2\}, \\ L_2 &= \{(s, r, s, -r)\mathbb{R} \vee (r - s, 0, 0, r + s)\mathbb{R} \mid (0, 0) \neq (r, s) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Durchschnitts $L_1 \cap L_2$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ suchen wir jene $(r, s) \in \mathbb{C}^2$, $(r, s) \neq (0, 0)$, für die

$$(r, 0, 0, s)\mathbb{C} \vee (0, r, s, 0)\mathbb{C} = (s, r, s, -r)\mathbb{C} \vee (r - s, 0, 0, r + s)\mathbb{C}.$$

Für solche $(r, s) \in \mathbb{C}^2$ ergibt sich, dass sie die Gleichung $r^2 + s^2 = 0$ erfüllen müssen, welche über \mathbb{C} die beiden Lösungen $r = is$ und $r = -is$ besitzt. Damit folgt die behauptete Gestalt der imaginären Leitgeraden u, v von \mathcal{E} . \square

Bemerkung 1.5.2 Die komplexen Leitgeraden u und v des elliptischen Netzes \mathcal{E} sind durch dieses eindeutig bestimmt.

Im nächsten Satz wird nun gezeigt, wie die Punkte der komplexen projektiven Geraden $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}_\infty$ und die Punkte der komplexen projektiven Leitgeraden u in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ (analog für die Punkte der Leitgeraden v) jeweils bijektiv auf die reellen Strahlen des elliptischen Netzes \mathcal{E} abgebildet werden können:

Satz 1.5.3 Die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} u &\rightarrow \mathcal{E} \\ (\lambda, \mu, -\mu i, -\lambda i)\mathbb{C} &\mapsto (\lambda_0, \mu_0, \mu_1, \lambda_1)\mathbb{R} \vee (-\lambda_1, -\mu_1, \mu_0, \lambda_0)\mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\rightarrow \mathbb{C}_\infty \\ (\lambda_0, \mu_0, \mu_1, \lambda_1)\mathbb{R} \vee (-\lambda_1, -\mu_1, \mu_0, \lambda_0)\mathbb{R} &\mapsto (\lambda, \mu)\mathbb{C} \end{aligned}$$

sind Bijektionen, wobei $(\lambda, \mu) := (\lambda_0 + \lambda_1 i, \mu_0 + \mu_1 i) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß die zweite Abbildung gleich Ψ^{-1} ist, wobei Ψ die in (1.1) definierte bijektive Funktion $\mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathcal{E}$ ist. Weiters ist

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}(1, 0, 0, -i) + \mathbb{C}(0, 1, -i, 0) \\ (\lambda, \mu) &\mapsto \lambda(1, 0, 0, -i) + \mu(0, 1, -i, 0) = (\lambda, \mu, -\mu i, -\lambda i) \end{aligned}$$

ein \mathbb{C} -Vektorraumisomorphismus, also

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}_\infty &\rightarrow u \\ (\lambda, \mu)\mathbb{C} &\mapsto (\lambda, \mu, -\mu i, -\lambda i)\mathbb{C} \end{aligned}$$

bijektiv. Somit ist auch die erste Abbildung $= \Psi f^{-1}$ bijektiv. \square

Bemerkung 1.5.4 Sei $G := (\lambda, \mu, -\mu i, -\lambda i)\mathbb{C} \in u$ und

$$g := (\lambda_0, \mu_0, \mu_1, \lambda_1)\mathbb{R} \vee (-\lambda_1, -\mu_1, \mu_0, \lambda_0)\mathbb{R} \in \mathcal{E}$$

der G bijektiv zugeordnete Netzstrahl.

Dann ist

$$\begin{aligned} ((\lambda_0, \mu_0, \mu_1, \lambda_1) - i(-\lambda_1, -\mu_1, \mu_0, \lambda_0))\mathbb{C} &= G \text{ und} \\ ((\lambda_0, \mu_0, \mu_1, \lambda_1) + i(-\lambda_1, -\mu_1, \mu_0, \lambda_0))\mathbb{C} &= \overline{G}, \end{aligned}$$

d.h. der Netzstrahl g in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ enthält die Punkte $G \in u$ und $\overline{G} \in v$, also $g = G \vee \overline{G}$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

1.6 Möbius-Transformationen

Nachdem wir uns mit den beiden Modellen \mathbb{C}_∞ und \mathcal{E} (Abschnitte 1.2, 1.4, 1.5) der reellen Möbiusgeometrie ein wenig vertraut gemacht haben, geht es nun im Folgenden darum, die relevanten Transformationen innerhalb des einen Modells mit jenen innerhalb des anderen Modells in eine Beziehung zu bringen. Dazu verschaffen wir uns zuerst einen Überblick über die bijektiven Transformationen in \mathbb{C}_∞ . Bezüglich unbewiesener Behauptungen in diesem Abschnitt sei wiederum auf die Literatur verwiesen (z.B. [11]).

1.6.1 Eine Möbius-Transformation in \mathbb{C}_∞ ist eine bijektive Abbildung von \mathbb{C}_∞ nach \mathbb{C}_∞ . Die Gruppe aller Möbius-Transformationen teilt sich in zwei Klassen, die Untergruppe der gleichsinnigen und die Menge der gegensinnigen Möbius-Transformationen.

Ist $M \in GL_2(\mathbb{C})$, so sind die gleichsinnigen Möbius-Transformationen von der Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_\infty &\rightarrow \mathbb{C}_\infty \\ (z_0, z_1)\mathbb{C} &\mapsto ((z_0, z_1)M)\mathbb{C} \end{aligned}$$

und die gegensinnigen Möbius-Transformationen von der Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_\infty &\rightarrow \mathbb{C}_\infty \\ (z_0, z_1)\mathbb{C} &\mapsto ((\overline{z_0}, \overline{z_1})M)\mathbb{C}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $\Gamma(\mathbb{C})$ die Gruppe der gleichsinnigen und mit $\Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ die Menge der gegensinnigen Möbius-Transformationen.

Für beide Arten von Möbius-Transformationen gilt ein Transitivitätssatz:

Satz 1.6.2 Sind p_1, p_2, p_3 und p'_1, p'_2, p'_3 jeweils drei verschiedene Punkte in \mathbb{C}_∞ , so gibt es genau ein $\mu \in \Gamma(\mathbb{C})$ mit $\mu(p_1) = p'_1$, $\mu(p_2) = p'_2$ und $\mu(p_3) = p'_3$.

Satz 1.6.3 Sind p_1, p_2, p_3 und p'_1, p'_2, p'_3 jeweils drei verschiedene Punkte in \mathbb{C}_∞ , so gibt es genau ein $\mu \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ mit $\mu(p_1) = p'_1$, $\mu(p_2) = p'_2$ und $\mu(p_3) = p'_3$.

Die gleichsinnigen Möbius-Transformationen sind Projektivitäten von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ und haben somit einen, zwei oder mehr als zwei Fixpunkte. Im letzten Fall handelt es sich um die Identität.

Die gegensinnigen Möbius-Transformationen (Anti-Projektivitäten) haben entweder keinen, einen, zwei oder mehr als zwei Fixpunkte. Im letzten Fall ist die Fixpunktmenge ein Möbiuskreis (siehe Abschnitt 1.2.1).

Satz 1.6.4 Ist μ ein Element von $\Gamma(\mathbb{C})$ bzw. $\Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ mit Fixpunktmenge F und ist $\varphi \in \Gamma(\mathbb{C}) \cup \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$, so ist $\varphi\mu\varphi^{-1}$ ein Element von $\Gamma(\mathbb{C})$ bzw. $\Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ mit Fixpunktmenge $\varphi(F)$.

Aus Satz 1.6.4 ergibt sich

Bemerkung 1.6.5 Jede Möbius-Transformation μ bestimmt eine Äquivalenzklasse

$$\{\varphi\mu\varphi^{-1} \mid \varphi \in \Gamma(\mathbb{C}) \cup \Gamma_\kappa(\mathbb{C})\}$$

von Möbius-Transformationen vom selben Typ und mit gleichartiger Fixpunktmenge.

Für zwei äquivalente Möbius-Transformationen μ_1, μ_2 mit Abbildungsmatrizen M_1 bzw. M_2 schreiben wir $\mu_1 \sim \mu_2$ oder auch $M_1 \sim M_2$.

Nach Satz 1.6.4 und Bemerkung 1.6.5 läuft die Klassifikation aller Möbius-Transformationen darauf hinaus, zu jedem Transformationstyp und jeder Art von Fixpunktmenge ein Vertretersystem aufzustellen. Dabei darf man sich für die Klassifikation von $\Gamma(\mathbb{C})$ auf die Fixpunktmenge $\{\infty\}, \{0, \infty\}, \mathbb{C}_\infty$ und für die Klassifikation von $\Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ auf die Fixpunktmenge $\emptyset, \{\infty\}, \{0, \infty\}, \mathbb{R}_\infty$ beschränken.

1.6.6 Klassifizierung der gleichsinnigen Möbius-Transformationen:

Sind $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(\mathbb{C})$ mit Matrizen M_1 bzw. M_2 , so ist

$$\mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow \exists T \in \text{GL}_2(\mathbb{C}), \exists t \in \mathbb{C}^\times : M_2 t \in \{T^{-1}M_1 T, T^{-1}\overline{M_1} T\}. \quad (1.14)$$

Die zu T gehörende Möbius-Transformation ist im Fall $M_2 t = T^{-1}M_1 T$ aus $\Gamma(\mathbb{C})$ und im Fall $M_2 t = T^{-1}\overline{M_1} T$ aus $\Gamma_\kappa(\mathbb{C})$.

Ist $\mu \in \Gamma(\mathbb{C})$ mit der Fixpunktmenge $\{0, \infty\}$, so hat μ eine Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}^\times \setminus \{1\}$. Eine solche Transformation μ ist eine Drehstreckung mit Zentrum 0.

Lemma 1.6.7 Für $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma(\mathbb{C})$ mit Fixpunktmenge $\{0, \infty\}$ und den Abbildungsmatrizen $M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ bzw. $M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^\times \setminus \{1\}$ gilt:

$$\mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow M_2 \in \{M_1, M_1^{-1}, \overline{M_1}, \overline{M_1^{-1}}\}.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $\mu_1 \sim \mu_2$. Dann folgt entweder $M_2 t = T^{-1} M_1 T$ (Fall a) oder $M_2 t = T^{-1} \overline{M_1} T$ (Fall b) für ein $t \in \mathbb{C}^\times$. Wir schreiben $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. In beiden

Fällen hat man die Gleichungen $at = a$ und $b\beta t = b$.

Im Fall (a) ist $\beta t^2 = \text{Det}(M_2 t) = \text{Det}(M_1) = \alpha$.

Ist $a \neq 0$, so folgt $t = 1$ und damit $\beta = \alpha$.

Ist $a = 0$, so folgt $b \neq 0$ und damit $\beta t = 1$ und schließlich $\beta = \alpha^{-1}$.

Im Fall (b) ist $\beta t^2 = \text{Det}(M_2 t) = \text{Det}(\overline{M_1}) = \overline{\alpha}$. Analog zu Fall (a) folgt jetzt $\beta = \overline{\alpha}$ oder $\beta = \overline{\alpha}^{-1} = \overline{\alpha^{-1}}$.

Ist umgekehrt $M_2 \in \{M_1, M_1^{-1}, \overline{M_1}, \overline{M_1^{-1}}\}$, also etwa $M_2 = M_1^{-1}$, so ist $\mu_1 \sim \mu_2$ vermöge $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ und $t = \alpha$. \square

Aus Lemma 1.6.7 ergibt sich, dass die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \mid \text{Im}(\alpha) \geq 0, |\alpha| \geq 1, \alpha \neq 1 \right\}$ ein Vertretersystem der Äquivalenzklassen aller gleichsinnigen Möbius-Transformationen mit genau zwei Fixpunkten darstellt.

Lemma 1.6.8 Jedes $\mu \in \Gamma(\mathbb{C})$ mit genau einem Fixpunkt ist äquivalent zur Translation längs \mathbb{R}_∞ mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Beweis. Gemäß Satz 1.6.4 dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass der Fixpunkt von μ gleich ∞ ist. Dann hat μ eine Abbildungsmatrix der Gestalt $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Wäre nun $d \neq a$, dann hätte μ einen weiteren Fixpunkt $(1, \frac{1}{a-d})\mathbb{C} \neq \infty$, wie man leicht nachrechnet. Es ist also $d = a$ und $M := \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ eine Abbildungsmatrix von μ . Setzt man $T := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, so gilt: $T^{-1} M T = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. \square

Aus den bisherigen Überlegungen erhalten wir die Tabelle 1.1 von Repräsentanten aller Äquivalenzklassen gleichsinniger Möbius-Transformationen.

Bez.	Transformation	Matrix	Fixpunkte
GLS-I	Identität	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	\mathbb{C}_∞
GLS-II	Drehstreckung mit Zentrum 0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ $\text{Im}(\alpha) \geq 0$ $ \alpha \geq 1$ $\alpha \neq 1$	$\{0, \infty\}$
GLS-III	Translation längs \mathbb{R}_∞	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\{\infty\}$

Tabelle 1.1: Repräsentanten gleichsinniger Möbius-Transformationen.

1.6.9 Klassifizierung der gegenseitigen Möbius-Transformationen:

Sind $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ mit Matrizen M_1 bzw. M_2 , so ist

$$\mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow \exists T \in \text{GL}_2(\mathbb{C}), \exists t \in \mathbb{C}^\times : M_2 t \in \{\overline{T^{-1} M_1 T}, \overline{T^{-1} M_1 T}\}. \quad (1.15)$$

Die zu T gehörende Möbius-Transformation ist im Fall $M_2 t = \overline{T^{-1} M_1 T}$ aus $\Gamma(\mathbb{C})$ und im Fall $M_2 t = \overline{T^{-1} M_1 T}$ aus $\Gamma_\kappa(\mathbb{C})$.

Aus Satz 1.6.3 folgt, dass es genau eine gegenseitige Möbius-Transformation gibt, die einen Möbiuskreis als Fixpunktmenge besitzt. Eine solche Transformation ist die Inversion (oder Spiegelung) an diesem Möbiuskreis. Ein Vertreter dieser Klasse ist gegeben durch die Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit Fixpunktmenge \mathbb{R}_∞ .

Zur Bestimmung der Äquivalenzklassen gegenseitiger Möbius-Transformationen mit genau zwei Fixpunkten benutzen wir Lemma 1.6.11. Dieses wiederum benötigt einen kleinen Hilfssatz:

Hilfsatz 1.6.10 *Ist $z \in \mathbb{C}$ und $|z| = 1$, so gibt es ein $r \in \mathbb{C}^\times$ mit $z = \frac{r}{\bar{r}}$.*

Beweis. Im Fall $z = -1$ gilt die Behauptung mit $r := \bar{i} - i$.

Im Fall $z \neq -1$ gilt die Behauptung mit $r := z + 1$, wie man leicht nachrechnet. \square

Lemma 1.6.11 *Ist $\mu \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ mit der Fixpunktmenge $\{0, \infty\}$, so ist μ Hintereinanderausführung einer Streckung mit Zentrum 0 und positivem Faktor und der Spiegelung an \mathbb{R}_∞ (eine Streck-Inversion längs \mathbb{R}_∞), hat also eine Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ mit $u \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.*

Beweis. Aufgrund der Fixpunkte 0 und ∞ hat μ jedenfalls eine Abbildungsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit $d \in \mathbb{C}^\times$. Nach Hilfssatz 1.6.10 gibt es ein $r \in \mathbb{C}^\times$ mit $\frac{d}{|d|} = \frac{r}{\bar{r}}$. Somit ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{r|d|}{\bar{r}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\bar{r}} \begin{pmatrix} \bar{r} & 0 \\ 0 & r|d| \end{pmatrix}$. Ist $\varphi \in \Gamma(\mathbb{C})$ mit Abbildungsmatrix $T := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$, so hat $\varphi^{-1}\mu\varphi$ die Abbildungsmatrix $\bar{T} \begin{pmatrix} \bar{r} & 0 \\ 0 & r|d| \end{pmatrix} T^{-1} = \bar{r} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |d| \end{pmatrix}$. \square

Lemma 1.6.12 Für $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ mit Fixpunktmenge $\{0, \infty\}$ und den Abbildungsmatrizen $M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ bzw. $M_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$ mit $u, v \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt:

$$\mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow M_2 \in \{M_1, M_1^{-1}\}.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $\mu_1 \sim \mu_2$. Dann folgt $M_2 t = \overline{T^{-1}} M_1 T$ für ein $t \in \mathbb{C}^\times$. Schreiben wir $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so hat man die Gleichungen $\bar{a}t = a, \bar{b}vt = b$ und $\bar{c}t = uc$.

Es ist $vt^2 = \text{Det}(M_2 t) = \text{Det}(\overline{T^{-1}} M_1 T) = u \frac{ad-bc}{\overline{ad-bc}}$.

Ist $a \neq 0$, so folgt aus $\bar{a}t = a$, dass $|t| = 1$ und folglich $|v| = |u|$, also $v = u$.

Ist $a = 0$, so ist $b \neq 0$ und $c \neq 0$. Aus $\bar{b}vt = b$ folgt, dass $|vt| = 1$ und aus $\bar{c}t = uc$ folgt, dass $|t| = |u|$, also zusammen $|vu| = 1$ und deswegen $v = \frac{1}{u}$.

Ist umgekehrt $M_2 = M_1^{-1}$, so ist $\mu_1 \sim \mu_2$ vermöge $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix}$ und $t = u$. \square

Aus Lemma 1.6.12 ergibt sich, dass die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \mid 1 < u \in \mathbb{R} \right\}$ ein Vertretersystem der Äquivalenzklassen aller gegensinnigen Möbius-Transformationen mit genau zwei Fixpunkten darstellt.

Lemma 1.6.13 Jedes $\mu \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ mit genau einem Fixpunkt ist äquivalent zur Gleit-Inversion längs \mathbb{R}_∞ mit der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Beweis. Gemäß Satz 1.6.4 dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass der Fixpunkt von μ gleich ∞ ist. Dann hat μ eine Abbildungsmatrix der Gestalt $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} =: M$. Wir definieren $u := b + \bar{b}d$. Es ist $u \neq 0$. Denn wäre $u = 0$, so hätte μ den Fixpunkt $\frac{b}{d}$, wie man leicht nachrechnet. Weiters ist $d\bar{d} = 1$. Denn wäre dies nicht der Fall, so wäre $\frac{b+\bar{b}d}{1-d\bar{d}}$ ein Fixpunkt von μ , wie man wiederum leicht nachrechnet. Aus $d\bar{d} = 1$ folgt $d\bar{u} = u$, wovon man sich

müheles überzeugt.

Nun sei $\varphi \in \Gamma(\mathbb{C})$ mit der Abbildungsmatrix $T := \begin{pmatrix} -\frac{1}{u} & -\frac{b}{2u} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann hat $\varphi^{-1}\mu\varphi$ die Abbildungsmatrix $\overline{T}MT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{u}{0} & \frac{u}{2u} \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & \frac{d}{2} \\ 0 & d \end{pmatrix} = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Mit $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ erhalten wir schließlich $\overline{S^{-1}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} S = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. \square

Lemma 1.6.14 *Ist $\mu \in \Gamma_{\kappa}(\mathbb{C})$ ohne einen Fixpunkt zu besitzen, so hat μ eine Abbildungsmatrix der Gestalt $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, wobei $1 \neq \alpha \in \mathbb{C}$ und $|\alpha| = 1$ (eine Dreh-Inversion am Einheitskreis).*

Beweis. Wegen $\mu^2 \in \Gamma_{\mathbb{C}}$ hat μ^2 mindestens einen Fixpunkt E . Sei $\mu(E) =: F \neq E$. Dann ist $\mu(F) = \mu^2(E) = E$ und somit $\mu^2(F) = \mu(E) = F$, also hat μ^2 zwei verschiedene Fixpunkte, die von μ vertauscht werden. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, dass 0 und ∞ die beiden Fixpunkte von μ^2 sind - und μ vertauscht diese. Das heißt aber, dass μ eine Abbildungsmatrix $M := \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ besitzt. Es läßt sich leicht nachrechnen, dass μ den Möbiuskreis mit Mittelpunkt 0 und Radius $r := \sqrt{|\frac{b}{c}|}$ invariant läßt. Die Möbius-Transformation $\varphi \in \Gamma(\mathbb{C})$ mit Abbildungsmatrix $T := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$ bildet diesen Kreis ab auf den Einheitskreis. Weiters ist μ äquivalent zu $\varphi\mu\varphi^{-1}$ mit der Abbildungsmatrix $\overline{T^{-1}}MT = \begin{pmatrix} 0 & \frac{b}{r} \\ rc & 0 \end{pmatrix} = \frac{b}{r} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{r^2c}{b} & 0 \end{pmatrix}$, wobei $|\frac{r^2c}{b}| = 1$. Dabei ist $\frac{r^2c}{b} \neq 1$, da μ sonst die Inversion am Einheitskreis wäre. \square

Lemma 1.6.15 *Für $\mu_1, \mu_2 \in \Gamma_{\kappa}(\mathbb{C})$ mit leerer Fixpunktmenge und den Abbildungsmatrizen $M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $M_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ mit $\alpha \neq 1, |\alpha| = 1, \beta \neq 1, |\beta| = 1$ gilt:*

$$\mu_1 \sim \mu_2 \Leftrightarrow M_2 \in \{M_1, \overline{M_1}\}.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $\mu_1 \sim \mu_2$. Dann folgt entweder $M_2t = \overline{T^{-1}}M_1T$ (Fall a) oder $M_2t = \overline{T^{-1}}\overline{M_1}T$ (Fall b) für ein $t \in \mathbb{C}^{\times}$. Wir schreiben $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Im Fall (a) gelten die Gleichungen $\overline{b}\beta t = c, \overline{a}t = d, \overline{d}\beta t = \alpha a, \overline{c}t = \alpha b$.

Ist $a \neq 0$, so folgt $d \neq 0$ und weiter aus der zweiten und dritten der obigen vier Gleichungen: $\beta = \frac{a}{\overline{d}t}\alpha = \frac{\overline{a\overline{d}}}{\overline{d\overline{a}}}\alpha = \frac{|a|^2}{|d|^2}\alpha$ und daraus $|a| = |d|$, also $\beta = \alpha$.

Ist $a = 0$, so folgt $d = 0$ und $b \neq 0, c \neq 0$ und weiter aus der ersten und vierten der obigen vier Gleichungen: $\alpha\beta = \frac{\overline{c\overline{b}}}{\overline{b\overline{c}}} = \frac{|c|^2}{|b|^2} = 1$, weil $|\alpha\beta| = 1$. Also ist $\beta = \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$.

Im Fall (b) gelten die Gleichungen $\bar{b}\beta t = c, \bar{a}t = d, \bar{d}\beta t = \bar{\alpha}a, \bar{c}t = \bar{\alpha}b$.

Wie im Fall (a) gilt: $a \neq 0 \Rightarrow \beta = \bar{\alpha}$ und $a = 0 \Rightarrow \beta = \alpha$.

Ist umgekehrt $M_2 = \overline{M_1}$, so ist $\mu_1 \sim \mu_2$ vermöge $\varphi \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ mit der Abbildungsmatrix $T := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ (φ ist die Inversion an $(\mathbb{R}i)_\infty$), da $\overline{T^{-1}M_1T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bar{\alpha} & 0 \end{pmatrix} = M_2$. \square

Lemma 1.6.15 besagt, dass die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha \neq 1, |\alpha| = 1, \operatorname{Im}(\alpha) \geq 0 \right\}$ ein Vertretersystem der Äquivalenzklassen aller gegenseitigen Möbius-Transformationen ohne Fixpunkt darstellt.

Zusammenfassend erhalten wir nun die Tabelle 1.2 von Repräsentanten aller Äquivalenzklassen gegenseitiger Möbius-Transformationen.

Bez.	Transformation	Matrix	Fixpunkte
GGs-I	Inversion an \mathbb{R}_∞	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	\mathbb{R}_∞
GGs-II	Streck-Inversion längs \mathbb{R}_∞	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$ $1 < u \in \mathbb{R}$	$\{0, \infty\}$
GGs-III	Gleit-Inversion längs \mathbb{R}_∞	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\{\infty\}$
GGs-IV	Dreh-Inversion am Einheitskreis	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ $\operatorname{Im}(\alpha) \geq 0$ $ \alpha = 1$ $\alpha \neq 1$	\emptyset

Tabelle 1.2: Repräsentanten gegenseitiger Möbius-Transformationen.

Bemerkung 1.6.16 Für $\alpha = 1$ in GGS-IV erhält man einen weiteren Vertreter der Klasse GGS-I, die Inversion am Einheitskreis.

Für $\alpha = -1$ in GGS-IV erhält man die elliptische Inversion am Einheitskreis, das ist eine Drehung um 180 Grad gefolgt von der Inversion am Einheitskreis.

1.7 Erweiterung von Möbius-Transformationen

Es sollen nun gleich- bzw. gegenseitige Möbius-Transformationen zu solchen Kollineationen in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ erweitert werden, die das elliptische Netz \mathcal{E} invariant lassen.

1.7.1 Sei $M := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ mit

$$\begin{aligned} \alpha &:= a_0 + a_1 i, \\ \beta &:= b_0 + b_1 i, \\ \gamma &:= c_0 + c_1 i, \\ \delta &:= d_0 + d_1 i. \end{aligned}$$

Wir erweitern M zu einer Matrix $\widehat{M} \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$:

$$\widehat{M} := \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & b_1 & a_1 \\ c_0 & d_0 & d_1 & c_1 \\ -c_1 & -d_1 & d_0 & c_0 \\ -a_1 & -b_1 & b_0 & a_0 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Der folgende Satz zeigt, dass die Matrixerweiterung $M \rightarrow \widehat{M}$ verträglich ist mit der Gruppenstruktur von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ bzw. $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$.

Satz 1.7.2 *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \widehat{M} \end{aligned}$$

ist ein Gruppenmonomorphismus.

Beweis. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^\times &\rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \\ \alpha &\mapsto \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ -a_1 & a_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist ein Gruppenmonomorphismus. Dies gilt dann auch für

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & b_0 & b_1 \\ -a_1 & a_0 & -b_1 & b_0 \\ c_0 & c_1 & d_0 & d_1 \\ -c_1 & c_0 & -d_1 & d_0 \end{pmatrix} =: A. \end{aligned}$$

\widehat{M} entsteht aus A , indem man bei A eine gewisse Anzahl von Zeilen- und dazu analogen Spaltenvertauschungen vornimmt, d.h. Vertauschung der Zeilen i, j gefolgt von einer Vertauschung der Spalten i, j . Mit diesen Operationen ist die Matrixmultiplikation verträglich, woraus die Behauptung folgt. \square

Die nun folgende Definition beschreibt, wie man eine gleichsinnige Möbius-Transformation zu einer Menge von “gleichsinnigen” Kollineationen in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ erweitern kann:

Definition 1.7.3 Ist $\mu \in \Gamma(\mathbb{C})$ mit Matrix $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ eine gleichsinnige Möbius-Transformation, so bezeichnen wir mit $\widehat{\mu}$ die Menge der zu $\{t\widehat{M} \mid t \in \mathbb{C}^\times\}$ gehörenden Kollineationen in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ und nennen diese ebenfalls *gleichsinnig*.

Damit diese Definition brauchbar ist, müssen wir die Verträglichkeit des Übergangs von μ zu $\widehat{\mu}$ mit dem Modellwechsel Ψ von \mathbb{C}_∞ nach \mathcal{E} nachweisen. “Verträglich” heißt, dass alle “über μ liegenden” gleichsinnigen Kollineationen aus der Menge $\widehat{\mu}$ die Strahlen des Netzes \mathcal{E} so transformieren, wie μ die \mathcal{E} entsprechenden Punkte aus \mathbb{C}_∞ transformiert. Diesen Nachweis liefert der folgende Satz:

Satz 1.7.4 Vermöge der Bijektion $\Psi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathcal{E}$ (siehe 1.1) ist die Gruppe $\Gamma(\mathbb{C})$ isomorph zur Gruppe

$$\Psi\Gamma(\mathbb{C})\Psi^{-1} = \{\Psi\mu\Psi^{-1} \mid \mu \in \Gamma(\mathbb{C})\},$$

wobei

$$\Psi\mu\Psi^{-1}(h) = \Phi(h) \quad \forall \Phi \in \widehat{\mu}, \quad \forall h \in \mathcal{E}.$$

Beweis. Die Isomorphie der beiden Gruppen mittels Ψ ist klar. Zum Nachweis der letzten Gleichung sei $z = (z_0, z_1)\mathbb{C} \in \mathbb{C}_\infty$. Für ein $\Phi \in \widehat{\mu}$ und für einen Strahl $\Psi(z) \in \mathcal{E}$ ist zu zeigen, daß $\Phi(\Psi(z)) = \Psi\mu\Psi^{-1}(\Psi(z))$, also $\Phi(\Psi(z)) = \Psi(\mu(z))$. Dies ist aber erfüllt, wie man leicht nachrechnet. \square

1.7.5 Um gegensinnige Möbius-Transformationen zu Kollineationen in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ erweitern zu können, erweitern wir zunächst die Konjugation

$$\kappa : (z_0, z_1)\mathbb{C} \mapsto (\overline{z_0}, \overline{z_1})\mathbb{C} \tag{1.17}$$

in \mathbb{C}_∞ zur Kollineation

$$\tilde{\kappa} : (u_0, u_1, u_2, u_3)\mathbb{R} \mapsto ((u_0, u_1, u_2, u_3)\tilde{K})\mathbb{R} = (u_0, u_1, -u_2, -u_3)\mathbb{R}, \tag{1.18}$$

wobei

$$\tilde{K} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Dadurch ist $\tilde{\kappa}$ verträglich mit $\Psi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathcal{E}$ (siehe 1.1), d.h.

$$\tilde{\kappa}\Psi((z_0, z_1)\mathbb{C}) = \Psi((\overline{z_0}, \overline{z_1})\mathbb{C}),$$

wie man leicht nachrechnet.

Die Kollineation $\tilde{\kappa}$ bildet also den zu einem Punkt aus \mathbb{C}_∞ gehörenden Netzstrahl auf den zum konjugiert-komplexen Punkt gehörenden Netzstrahl ab.

Bemerkung 1.7.6 Es ist $\tilde{K}\tilde{K} = E$ und die Kollineation $\tilde{\kappa}$ ist eine harmonische axiale Kollineation mit den beiden Achsen $(1, 0, 0, 0)\mathbb{R} \vee (0, 1, 0, 0)\mathbb{R}$ und $(0, 0, 1, 0)\mathbb{R} \vee (0, 0, 0, 1)\mathbb{R}$, also die Punktspiegelung an der x-Achse, d.h. $\tilde{\kappa}$ bewirkt eine Drehung des Netzes \mathcal{E} um die x-Achse um 180 Grad.

Nun erweitern wir $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, zu einer Matrix $\tilde{M} \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$:

$$\tilde{M} := \tilde{K}\widehat{M} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & b_1 & a_1 \\ c_0 & d_0 & d_1 & c_1 \\ c_1 & d_1 & -d_0 & -c_0 \\ a_1 & b_1 & -b_0 & -a_0 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \text{GL}_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \text{GL}_4(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \tilde{M} \end{aligned}$$

ist nicht homomorph, jedoch injektiv.

In der folgenden Definition wird erklärt, wie eine gegenseitige Möbius-Transformation zu einer Menge von gegenseitigen Kollineationen in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ erweitert werden kann:

Definition 1.7.7 Ist $\mu \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ mit Matrix $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ eine gegenseitige Möbius-Transformation, so bezeichnen wir mit $\tilde{\mu}$ die Menge der zu $\{\tilde{tM} \mid t \in \mathbb{C}^\times\}$ gehörenden Kollineationen in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ und nennen diese ebenfalls *gegenseitig*.

Für die Sinnhaftigkeit dieser Definition muss nachgewiesen werden, dass der Übergang von μ zu $\tilde{\mu}$ mit dem Modellwechsel Ψ von \mathbb{C}_∞ nach \mathcal{E} verträglich ist. Das heißt, dass alle “über μ liegenden” gegenseitigen Kollineationen aus der Menge $\tilde{\mu}$ die Geraden des Netzes \mathcal{E} so transformieren, wie μ die \mathcal{E} entsprechenden Punkte aus \mathbb{C}_∞ transformiert. Dies besagt folgender Satz:

Satz 1.7.8 Vermöge der Bijektion $\Psi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathcal{E}$ ist die Gruppe $\Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ isomorph zur Gruppe

$$\Psi\Gamma_\kappa(\mathbb{C})\Psi^{-1} = \{\Psi\mu\Psi^{-1} \mid \mu \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})\},$$

wobei

$$\Psi\mu\Psi^{-1}(h) = \Phi(h) \quad \forall \Phi \in \tilde{\mu}, \quad \forall h \in \mathcal{E}.$$

Beweis. Analog zu 1.7.4 □

Für den Umgang mit den beiden Operatoren $\widehat{}$ und $\widetilde{}$ notieren wir uns zwei Regeln:

Hilfsatz 1.7.9 Seien $M, N \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ und \widetilde{K} die Matrix von 1.19.

Dann gilt:

$$\widehat{M} = \widetilde{K} \widehat{M} \widetilde{K} \quad (1.21)$$

$$\widetilde{MN} = \widehat{M} \widetilde{K} \widehat{N} \quad (1.22)$$

Beweis. Es ist $\widetilde{M} := \widetilde{K} \widehat{M} = \widehat{M} \widetilde{K}$. Daraus folgt mit $\widetilde{K}^{-1} = \widetilde{K}$ die erste Regel.

Die zweite Regel ergibt sich mit Satz 1.7.2: $\widetilde{MN} = \widetilde{K} \widehat{MN} = \widetilde{K} \widehat{M} \widehat{N} = \widehat{M} \widehat{N} = \widehat{M} \widetilde{K} \widehat{N} = \widetilde{M} \widetilde{K} \widehat{N} = \widetilde{M} \widetilde{K} \widetilde{N}$. □

Bemerkung 1.7.10 Die erste Regel besagt, dass die gleichsinnigen Kollineationen mit den Abbildungsmatrizen \widehat{M} bzw. \widetilde{M} bis auf \widetilde{K} (Spiegelung an der x-Achse) dieselbe Kollineation sind.

Die zweite Regel ist eine ‘‘Quasi-Homomorphie’’ des Operators $\widetilde{}$. Sie ist gleichwertig mit

$$\widetilde{MN} = \widetilde{M} \widetilde{K} \widetilde{N}, \quad (1.23)$$

wie man leicht nachrechnet.

1.8 Netzerhaltende Kollineationen

Im vorhergehenden Abschnitt hatten wir Möbius-Transformationen aus $\Gamma(\mathbb{C})$ vermöge der Abbildung $\mu \rightarrow \widehat{\mu}$ (Def. 1.7.3) und Möbius-Transformationen aus $\Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ vermöge der Abbildung $\mu \rightarrow \widetilde{\mu}$ (Def. 1.7.7) zu solchen Kollineationen erweitert, die das elliptische Netz \mathcal{E} invariant lassen. Nun wollen wir zeigen, dass **jede** Kollineation mit dieser Eigenschaft auf eine dieser beiden Arten erfasst werden kann, also entweder Element von $\widehat{\mu}$ oder von $\widetilde{\mu}$ für ein $\mu \in \Gamma(\mathbb{C}) \cup \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ ist.

Satz 1.8.1 Sei $\Phi : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ eine Kollineation, die das elliptische Netz \mathcal{E} invariant läßt. Dann gibt es genau ein $\mu \in \Gamma(\mathbb{C})$ oder genau ein $\mu \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$, sodaß

$$\Phi \in \widehat{\mu} \text{ bzw. } \Phi \in \widetilde{\mu}.$$

Beweis. Seien u, v ((1.12),(1.13)) die imaginären Leitgeraden von \mathcal{E} . Die Kollineation Φ kann auch als Kollineation in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ aufgefaßt werden. Nach Voraussetzung und mit

Bemerkung 1.5.2, Satz 1.5.3 und Bemerkung 1.5.4 muß Φ die Menge $\{u, v\}$ invariant lassen, d.h. es muß entweder $(\Phi(u) = u, \Phi(v) = v)$ oder $(\Phi(u) = v, \Phi(v) = u)$ gelten.

Sei $\underline{e} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis und $\underline{v} = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ die Basis in \mathbb{C}^4 mit $v_0 := (1, 0, 0, -i)$, $v_1 := (0, 1, -i, 0)$, $v_2 := (1, 0, 0, i)$, $v_3 := (0, 1, i, 0)$.

Dann ist $\underline{v} = \underline{e}T$ mit Matrix

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 & i \\ -i & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) $\Phi(u) = u, \Phi(v) = v$:

Da $u = v_0\mathbb{C} \vee v_1\mathbb{C}$, $v = v_2\mathbb{C} \vee v_3\mathbb{C}$ und $(v_2, v_3) = (\overline{v_0}, \overline{v_1})$, wird Φ induziert durch einen linearen Automorphismus $\underline{v} \mapsto \underline{v}F$ in \mathbb{C}^4 mit

$$F := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ 0 & 0 & \overline{\gamma} & \overline{\delta} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \alpha &:= a_0 + a_1i, \\ \beta &:= b_0 + b_1i, \\ \gamma &:= c_0 + c_1i, \\ \delta &:= d_0 + d_1i. \end{aligned}$$

$\underline{v} \mapsto \underline{v}F$ läßt sich auch schreiben als $\underline{e} \mapsto \underline{e}G$ mit $G := TFT^{-1}$. G ist aber eine Matrix $\in GL_4(\mathbb{R})$ und von der Gestalt

$$G = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & -b_1 & -a_1 \\ c_0 & d_0 & -d_1 & -c_1 \\ c_1 & d_1 & d_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & b_0 & a_0 \end{pmatrix} = \widehat{\begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\beta} \\ \overline{\gamma} & \overline{\delta} \end{pmatrix}}.$$

Also ist $\Phi \in \widehat{\mu}$ für genau ein $\mu \in \Gamma(\mathbb{C})$.

(b) $\Phi(u) = v, \Phi(v) = u$:

In diesem Fall wird Φ induziert durch einen linearen Automorphismus $\underline{v} \mapsto \underline{v}F$ in \mathbb{C}^4 mit

$$F := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma & \delta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} & 0 & 0 \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit auch durch $\underline{e} \mapsto \underline{e}G$ mit

$$G := TFT^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & b_1 & a_1 \\ c_0 & d_0 & d_1 & c_1 \\ c_1 & d_1 & -d_0 & -c_0 \\ a_1 & b_1 & -b_0 & -a_0 \end{pmatrix} = \widetilde{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}}.$$

Also ist $\Phi \in \tilde{\mu}$ für genau ein $\mu \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$.

□

Bemerkung 1.8.2 Im Beweis des Satzes 1.8.1 wurde gezeigt, dass gleichsinnige netzerhaltende Kollineationen die imaginären Leitgeraden u, v des elliptischen Netzes \mathcal{E} jeweils auf sich selbst abbilden, während gegensinnige netzerhaltende Kollineationen diese imaginären Leitgeraden vertauschen.

1.9 Cliffordsche Schiebungen

Als erstes Beispiel für Satz 1.8.1 betrachten wir die sogenannten Cliffordschen Schiebungen. Das sind diejenigen Kollineationen, die ein elliptisches Netz, im speziellen das Netz \mathcal{E} , nicht nur invariant, sondern sogar strahlenweise invariant lassen. Wir werden sehen, dass jede Cliffordsche Schiebung in der Menge $\hat{\mu}$ mit der Möbius-Transformation $\mu = \text{id}_{\mathbb{C}_\infty}$ zu finden ist.

Zunächst folgende zwei Hilfssätze:

Lemma 1.9.1 Sei φ eine Projektivität in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ und $\varphi \neq \text{id}$. Dann gilt:

φ ist elliptisch (d.h. hat keine reellen Fixpunkte) mit den imaginären Fixpunkten $(1, i)\mathbb{C}$ und $(1, -i)\mathbb{C} \Leftrightarrow$

φ hat eine Abbildungsmatrix der Gestalt $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ mit $y \neq 0$.

Beweis. Der Nachweis der Behauptung ist eine einfache Rechnung, die dem Leser überlassen sei. □

Lemma 1.9.2 Ist Φ eine Cliffordsche Schiebung, $\Phi \neq \text{Id}$, und ist $s \in \mathcal{E}$ eine Netzgerade, so ist $\Phi|_s$ eine elliptische Projektivität.

Beweis. Da \mathcal{E} unter Φ strahlenweise invariant bleibt, hat die komplexe Erweiterung $\Phi^{\mathbb{C}}$ von Φ die komplexen Leitgeraden u, v von \mathcal{E} (siehe Satz 1.5.1) als Fixpunktgeraden. Nehmen wir an, Φ hat auf dem Strahl s einen reellen Fixpunkt, so ist $\Phi|_{s^{\mathbb{C}}}$ die Identität ($s^{\mathbb{C}}$ bezeichne die komplexe Erweiterung von s in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$). Dann ist aber auch $\Phi|_s$ die Identität.

Ist η eine Ebene in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, die den Netzstrahl $t \neq s$ enthält, so ist diese Ebene eine Fixebene. Da es mindestens fünf verschiedene solche Ebenen gibt (von denen keine vier kopunktal sind), ist Φ die Identität in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Satz 1.9.3 *Ist Φ eine Cliffordsche Schiebung und sind $P = (a, b, c, d)\mathbb{R}$ und $P' = (a', b', c', d')\mathbb{R}$ zwei Punkte auf demselben Strahl $s \in \mathcal{E}$ mit $\Phi(P) = P'$, so ist Φ gegeben*

durch die Matrix $\widehat{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}$, wobei

$$\alpha := \begin{cases} (a - di)(a' + d'i) & \text{für } s \neq g_{\infty} \\ (b - ci)(b' + c'i) & \text{für } s = g_{\infty} \end{cases} \quad (1.24)$$

Beweis. Ist Φ die Identität, so ist der Satz trivial. Sei also $\Phi \neq \text{Id}$.

Ist $s \neq g_{\infty}$, so kann man Punkte $P_0, P'_0 \in g_0$ finden, sodaß $\Phi(P_0) = P'_0$ gelten muß, und zwar ist $P_0 := (P \vee g_{\infty}) \cap g_0 = (a, 0, 0, d)\mathbb{R}$ und $P'_0 := (P' \vee g_{\infty}) \cap g_0 = (a', 0, 0, d')\mathbb{R}$. Wir nehmen also für $s \neq g_{\infty}$ o.B.d.A. an, daß $P, P' \in g_0$.

Nach Lemma 1.9.2 ist $\Phi|_{g_0}$ eine elliptische Projektivität. Da der Netzstrahl g_0 die beiden imaginären Fixpunkte $(1, 0, 0, -i)\mathbb{C}$ und $(1, 0, 0, i)\mathbb{C}$ auf den Leitgeraden u bzw. v von \mathcal{E} (siehe Satz 1.5.1) enthält, hat nach Lemma 1.9.1 die Abbildungsmatrix von $\Phi|_{g_0}$ die Form $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Durch die Bedingung, dass P auf P' abgebildet wird, ist diese Matrix (bis auf einen reellen Faktor $\neq 0$) eindeutig bestimmt, wovon man sich leicht überzeugt.

Wir berechnen diese Matrix, indem wir $\Phi|_{g_0}$ zerlegen in die Hintereinanderausführung der zwei elliptischen Projektivitäten mit den Abbildungsmatrizen $\begin{pmatrix} a & -d \\ d & a \end{pmatrix}$ bzw.

$\begin{pmatrix} a' & d' \\ -d' & a' \end{pmatrix}$, die $(a, d)\mathbb{R}$ auf $(1, 0)\mathbb{R}$ bzw. $(1, 0)\mathbb{R}$ auf $(a', d')\mathbb{R}$ abbilden:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -d \\ d & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & d' \\ -d' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + dd' & ad' - a'd \\ a'd - ad' & aa' + dd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Re}(\alpha) & \text{Im}(\alpha) \\ -\text{Im}(\alpha) & \text{Re}(\alpha) \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha := (a - di)(a' + d'i) \in \mathbb{C}^{\times}.$$

Da Φ als Cliffordsche Schiebung und nach Satz 1.8.1 ein Element der Menge $\widehat{\text{id}}_{\mathbb{C}^{\infty}}$ ist, hat die Abbildungsmatrix von Φ die Gestalt $\widehat{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}$ (siehe Def. von \widehat{M} unter 1.16).

Für den Fall $s = g_\infty$ geht man analog vor. \square

Bemerkung 1.9.4 Da es auf einen reellen Faktor $\neq 0$ nicht ankommt, kann man in Satz 1.9.3 auch $\alpha = \frac{a'+d'i}{a+di}$ bzw. $\alpha = \frac{b'+c'i}{b+ci}$ setzen.

1.10 Transitivität der netzerhaltenden Kollineationen

In Analogie zu den beiden Transitivitätssätzen für gleichsinnige und gegensinnige Möbius-Transformationen (siehe Satz 1.6.2 bzw. Satz 1.6.3) gibt es auch für gleich- und gegensinnige netzerhaltende Kollineationen solche Sätze. Als zusätzliche Voraussetzung hat man für einen Punkt lediglich dessen Bildpunkt auf dem zugehörigen Bildstrahl anzugeben.

Zunächst folgende vorausgreifende Benennung (ausführlicher in Kapitel 2):

Definition 1.10.1 Ist $s \in \mathcal{E}$, so nennen wir den Punkt $\Psi^{-1}(s) \in \mathbb{C}_\infty$ das *Netzbild* des Strahles s , wobei Ψ die unter (1.1) definierte Bijektion ist.

Satz 1.10.2 Sind h_1, h_2, h_3 und h'_1, h'_2, h'_3 jeweils drei verschiedene Strahlen des elliptischen Netzes \mathcal{E} und sind P, P' Punkte auf h_1 bzw. h'_1 , so gibt es genau eine gleichsinnige Kollineation Φ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, die \mathcal{E} in sich transformiert und h_i auf h'_i für $i = 1, 2, 3$ sowie P auf P' abbildet.

Sind $(s_i, t_i)\mathbb{C} \in \mathbb{C}_\infty, (s'_i, t'_i)\mathbb{C} \in \mathbb{C}_\infty$ die Netzbilder der Strahlen h_i bzw. h'_i für $i = 1, 2, 3$ und ist $P = (a, b, c, d)\mathbb{R}, P' = (a', b', c', d')\mathbb{R}$, so ist $\widehat{M} \in \text{GL}_4(\mathbb{R})$ die Matrix von Φ , wobei

$$M := \overline{\text{Det}(N)} \varepsilon N \varepsilon' N' \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$$

die Matrix einer gleichsinnigen Möbius-Transformation ist und

$$N := \begin{pmatrix} t_2(s_1 t_3 - s_3 t_1) & t_1(s_2 t_3 - s_3 t_2) \\ s_2(s_3 t_1 - s_1 t_3) & s_1(s_3 t_2 - s_2 t_3) \end{pmatrix}, \quad N' := \begin{pmatrix} s'_1(s'_3 t'_2 - s'_2 t'_3) & t'_1(s'_3 t'_2 - s'_2 t'_3) \\ s'_2(s'_1 t'_3 - s'_3 t'_1) & t'_2(s'_1 t'_3 - s'_3 t'_1) \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon := \begin{cases} (a - di)s_1(s_3 t_2 - s_2 t_3) & \text{für } h_1 \neq g_\infty \\ (b - ci)t_1(s_3 t_2 - s_2 t_3) & \text{für } h_1 = g_\infty \end{cases} \quad (1.25)$$

$$\varepsilon' := \begin{cases} (a' + d'i)\overline{s'_1(s'_3 t'_2 - s'_2 t'_3)} & \text{für } h'_1 \neq g_\infty \\ (b' + c'i)\overline{t'_1(s'_3 t'_2 - s'_2 t'_3)} & \text{für } h'_1 = g_\infty \end{cases} \quad (1.26)$$

Beweis. Die Möbius-Transformation in $\Gamma(\mathbb{C})$ mit der Matrix N' bildet $(0, \infty, 1)$ ab auf $((s'_1, t'_1)\mathbb{C}, (s'_2, t'_2)\mathbb{C}, (s'_3, t'_3)\mathbb{C})$. Die Kollineation mit Matrix \widehat{N}' bildet den Punkt $R := (1, 0, 0, 0)\mathbb{R}$ auf den Punkt $R' \in h'_1$ ab, wobei

$$R' = (\operatorname{Re}(s'_1(s'_3 t'_2 - s'_2 t'_3)), \operatorname{Re}(t'_1(s'_3 t'_2 - s'_2 t'_3)), \operatorname{Im}(t'_1(s'_3 t'_2 - s'_2 t'_3)), \operatorname{Im}(s'_1(s'_3 t'_2 - s'_2 t'_3)))\mathbb{R}.$$

Nach Satz 1.9.3 hat die Cliffordsche Schiebung, die R' auf $P' = (a', b', c', d')\mathbb{R}$ abbildet, die Matrix $\begin{pmatrix} \varepsilon' & 0 \\ 0 & \varepsilon' \end{pmatrix}$ (siehe (1.16)). Zusammen ergibt sich die Kollineation Λ' mit der Matrix $\widehat{\varepsilon' N'}$, welche die Strahlen g_0, g_∞, g_1 auf die Strahlen h'_1, h'_2, h'_3 und R auf P' abbildet.

Analog erhalten wir die Kollineation Λ mit der Matrix $\widehat{\operatorname{Det}(N)\overline{\varepsilon}N^{-1}}$, welche die Strahlen g_0, g_∞, g_1 auf die Strahlen h_1, h_2, h_3 und R auf P abbildet.

Also hat Λ^{-1} die Matrix $\widehat{\operatorname{Det}(N)\varepsilon N}$ (siehe Satz 1.7.2) und somit $\Phi := \Lambda'\Lambda^{-1}$ die Matrix \widehat{M} und die gewünschten Eigenschaften. Die Eindeutigkeit von Φ folgt mit Satz 1.8.1. \square

Satz 1.10.3 *Sind h_1, h_2, h_3 und h'_1, h'_2, h'_3 jeweils drei verschiedene Strahlen des elliptischen Netzes \mathcal{E} und sind P, P' Punkte auf h_1 bzw. h'_1 , so gibt es genau eine gegensinnige Kollineation Φ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, die \mathcal{E} in sich transformiert und h_i auf h'_i für $i = 1, 2, 3$ sowie P auf P' abbildet.*

Mit denselben Bezeichnungen wie in Satz 1.10.2 ist $\widetilde{M} \in \operatorname{GL}_4(\mathbb{R})$ die Matrix von Φ , wobei

$$M := \operatorname{Det}(N)\overline{\varepsilon}N\varepsilon'N' \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$$

die Matrix einer gegensinnigen Möbius-Transformation ist.

Beweis. Nach Satz 1.10.2 sind durch $M_1 := \widehat{\operatorname{Det}(N)\varepsilon N}$ und $M_2 := \widehat{\varepsilon' N'}$ Möbius-Transformationen μ_1 bzw. $\mu_2 \in \Gamma(\mathbb{C})$ bestimmt, deren Erweiterungen Λ mit Matrix \widehat{M}_1 bzw. Λ' mit Matrix \widehat{M}_2 auf $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ die Strahlen h_1, h_2, h_3 auf die Strahlen g_0, g_∞, g_1 bzw. g_0, g_∞, g_1 auf h'_1, h'_2, h'_3 und P nach $R := (1, 0, 0, 0)\mathbb{R}$ bzw. R nach P' abbilden.

Mit der Konjugation κ von (1.17) hat die gegensinnige Möbius-Transformation $\mu := \mu_2\kappa\mu_1$, die die Netzbilder von h_i auf jene von h'_i für $i = 1, 2, 3$ abbildet, die Matrix $\widehat{M}_1 M_2$.

Die gegensinnige Erweiterung Φ von μ hat unter Verwendung der Regel 1.23 die Matrix $\widehat{M}_1 M_2 = \widehat{M}_1 \widetilde{K} \widehat{M}_2$ und somit die gewünschten Eigenschaften. Die Eindeutigkeit von Φ folgt mit Satz 1.8.1. \square

1.11 Klassifikation der netzerhaltenden Kollineationen

Ausgehend von den verschiedenen Äquivalenzklassen gleich- und gegensinniger Möbius-Transformationen wollen wir nun die gleich- und gegensinnigen und das elliptische Netz \mathcal{E} invariant lassenden Kollineationen in Äquivalenzklassen unterteilen, die sich in der Art ihrer Fixpunktmenge voneinander unterscheiden. Dazu sind zunächst einige Vorbereitungen notwendig, um diese Kollineationen und zunächst die Möbius-Transformationen innerhalb des Matrixkalküls erfassen zu können.

Zu einer Matrix $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ über einem Körper \mathbb{K} , $1 < n \in \mathbb{N}$, sei

$$[M] := \{tM \mid t \in \mathbb{K}^\times\}.$$

1.11.1 Ist $\mu \in \Gamma(\mathbb{C})$ eine gleichsinnige Möbius-Transformation mit Abbildungsmatrix $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, so ist $[M]$ die Menge aller zu μ gehörenden Abbildungsmatrizen.

Ist $\mu \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ eine gegensinnige Möbius-Transformation mit Abbildungsmatrix $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, so ist die Menge aller zu μ gehörenden Abbildungsmatrizen ebenfalls die Menge $[M]$, die wir dann aber mit $[M]_\kappa$ bezeichnen.

Weiters bezeichnen wir folgende Mengen:

$$\begin{aligned} M(\mathbb{C}) &:= \{[M] \mid M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})\}, \\ M_\kappa(\mathbb{C}) &:= \{[M]_\kappa \mid M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})\}. \end{aligned}$$

Schließlich sei

$$M_{\mathbb{C}} := M(\mathbb{C}) \cup M_\kappa(\mathbb{C}).$$

Es ist nun klar, dass die Gruppe

$$\Gamma_{\mathbb{C}} := \Gamma(\mathbb{C}) \cup \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$$

aller Möbius-Transformationen bijektiv ist zur Menge $M_{\mathbb{C}}$. Definieren wir für die Menge $M_{\mathbb{C}}$ eine Verknüpfung mit den Regeln

$$\begin{aligned} [M_1][M_2] &:= [M_1 M_2], \\ [M_1][M_2]_\kappa &:= [\overline{M_1} M_2]_\kappa, \\ [M_1]_\kappa[M_2] &:= [M_1 M_2]_\kappa, \\ [M_1]_\kappa[M_2]_\kappa &:= [\overline{M_1} M_2], \end{aligned}$$

so ist $M_{\mathbb{C}}$ eine Gruppe und es gilt

Satz 1.11.2 *Die Bijektion*

$$f : \Gamma_{\mathbb{C}} \rightarrow M_{\mathbb{C}}$$

$$\mu \mapsto \begin{cases} [M] & \text{für } \mu \in \Gamma(\mathbb{C}) \text{ mit Abb.-Matrix } M \\ [M]_{\kappa} & \text{für } \mu \in \Gamma_{\kappa}(\mathbb{C}) \text{ mit Abb.-Matrix } M \end{cases}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Exemplarisch sei die Homomorphie der Abbildung gezeigt für $\mu_1 \in \Gamma(\mathbb{C})$ mit Abbildungsmatrix M_1 und $\mu_2 \in \Gamma_{\kappa}(\mathbb{C})$ mit Abbildungsmatrix M_2 . Es ist zu verifizieren, dass $f(\mu_2\mu_1) = f(\mu_1)f(\mu_2)$.

Für $z\mathbb{C} \in \mathbb{C}_{\infty}$ ist $(\mu_2\mu_1)(z\mathbb{C}) = \mu_2(zM_1\mathbb{C}) = \overline{zM_1}M_2\mathbb{C} = \overline{z}M_1M_2\mathbb{C}$.

Also ist $f(\mu_2\mu_1) = [\overline{M_1}M_2]_{\kappa}$. Nach der zweiten Verknüpfungsregel ist $[\overline{M_1}M_2]_{\kappa} = [M_1][M_2]_{\kappa} = f(\mu_1)f(\mu_2)$.

Für die restlichen drei Fälle ergibt sich die Homomorphie von f analog. \square

Bemerkung 1.11.3 Aus den Verknüpfungsregeln für die Gruppe $M_{\mathbb{C}}$ ergibt sich für die Inversenbildung:

$$[M]^{-1} = [M^{-1}],$$

$$[M]_{\kappa}^{-1} = [\overline{M^{-1}}]_{\kappa}.$$

1.11.4 Zur Handhabung der netzinvarianten Kollineationen benennen wir die folgenden Mengen:

$$M(\mathcal{E}) := \{[\widehat{M}] \mid M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})\},$$

$$M_{\kappa}(\mathcal{E}) := \{[\widetilde{M}] \mid M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})\}$$

und weiter

$$M_{\mathcal{E}} := M(\mathcal{E}) \cup M_{\kappa}(\mathcal{E}).$$

Wir bezeichnen mit $\Gamma(\mathcal{E})$ die Gruppe der gleichsinnigen und mit $\Gamma_{\kappa}(\mathcal{E})$ die Menge der gegensinnigen das elliptische Netz \mathcal{E} invariant lassender Kollineationen (siehe Definitionen 1.7.3 und 1.7.7).

Nach den bisherigen Ergebnissen ist es klar (siehe Satz 1.8.1), dass die Gruppe

$$\Gamma_{\mathcal{E}} := \Gamma(\mathcal{E}) \cup \Gamma_{\kappa}(\mathcal{E})$$

aller netzinvarianter Kollineationen bijektiv ist zur Menge $M_{\mathcal{E}}$. Definieren wir für diese Menge eine Verknüpfung mit den Regeln

$$\begin{aligned}
[\widehat{M}_1][\widehat{M}_2] &:= [\widehat{M_1 M_2}], \\
[\widetilde{M}_1][\widetilde{M}_2] &:= [\widetilde{M_1 M_2}], \\
[\widehat{M}_1][\widetilde{M}_2] &:= [\widehat{M_1 M_2}], \\
[\widetilde{M}_1][\widehat{M}_2] &:= [\widetilde{M_1 M_2}],
\end{aligned}$$

so ist M_ε eine Gruppe und es gilt

Satz 1.11.5 *Die Bijektion*

$$\begin{aligned}
g : \Gamma_\varepsilon &\rightarrow M_\varepsilon \\
\Phi &\mapsto \begin{cases} [\widehat{M}] & \text{für } \Phi \in \Gamma(\varepsilon) \text{ mit Abb.-Matrix } \widehat{M} \\ [\widetilde{M}] & \text{für } \Phi \in \Gamma_\kappa(\varepsilon) \text{ mit Abb.-Matrix } \widetilde{M} \end{cases}
\end{aligned}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Wir benutzen im Folgenden Satz 1.7.2, Bem. 1.7.6 sowie (1.20),(1.21), (1.22) und (1.23).

Für $\Phi_1 \in \Gamma(\varepsilon)$ und $\Phi_2 \in \Gamma(\varepsilon)$ mit Abbildungsmatrizen \widehat{M}_1 bzw. \widehat{M}_2 folgt die Homomorphie aus Satz 1.7.2.

Für $\Phi_1 \in \Gamma(\varepsilon)$ und $\Phi_2 \in \Gamma_\kappa(\varepsilon)$ mit Abbildungsmatrizen \widehat{M}_1 bzw. \widetilde{M}_2 ist $(\Phi_2\Phi_1)(\mathbf{x}\mathbb{R}) = \Phi_2(\mathbf{x}\widehat{M}_1\mathbb{R}) = \mathbf{x}\widehat{M}_1\widetilde{M}_2\mathbb{R} = \mathbf{x}\widehat{M}_1\widetilde{K}\widehat{M}_2\mathbb{R} = \mathbf{x}\widehat{M}_1M_2\mathbb{R}$, also $g(\Phi_2\Phi_1) = [\widehat{M_1 M_2}] = g(\Phi_1)g(\Phi_2)$ aufgrund der zweiten Verknüpfungsregel.

Für $\Phi_1 \in \Gamma_\kappa(\varepsilon)$ und $\Phi_2 \in \Gamma(\varepsilon)$ mit Abbildungsmatrizen \widetilde{M}_1 bzw. \widehat{M}_2 ist $(\Phi_2\Phi_1)(\mathbf{x}\mathbb{R}) = \Phi_2(\mathbf{x}\widetilde{M}_1\mathbb{R}) = \mathbf{x}\widetilde{M}_1\widehat{M}_2\mathbb{R} = \mathbf{x}\widetilde{M}_1\widetilde{K}\widetilde{K}\widehat{M}_2\mathbb{R} = \mathbf{x}\widetilde{M}_1\widetilde{K}\widehat{M}_2\mathbb{R} = \mathbf{x}\widetilde{M}_1M_2\mathbb{R}$, also $g(\Phi_2\Phi_1) = [\widetilde{M_1 M_2}] = g(\Phi_1)g(\Phi_2)$ nach der dritten Verknüpfungsregel.

Für $\Phi_1 \in \Gamma_\kappa(\varepsilon)$ und $\Phi_2 \in \Gamma_\kappa(\varepsilon)$ mit Abbildungsmatrizen \widetilde{M}_1 bzw. \widetilde{M}_2 ist $(\Phi_2\Phi_1)(\mathbf{x}\mathbb{R}) = \Phi_2(\mathbf{x}\widetilde{M}_1\mathbb{R}) = \mathbf{x}\widetilde{M}_1\widetilde{M}_2\mathbb{R} = \mathbf{x}\widetilde{K}\widehat{M}_1\widetilde{K}\widetilde{M}_2\mathbb{R} = \mathbf{x}\widehat{M}_1\widetilde{M}_2\mathbb{R} = \mathbf{x}\widehat{M}_1M_2\mathbb{R}$, also $g(\Phi_2\Phi_1) = [\widetilde{M_1 M_2}] = g(\Phi_1)g(\Phi_2)$ mit der vierten Verknüpfungsregel. \square

Bemerkung 1.11.6 Aus den Verknüpfungsregeln für die Gruppe M_ε ergibt sich für die Inversenbildung:

$$\begin{aligned}
[\widehat{M}]^{-1} &= [\widehat{M^{-1}}], \\
[\widetilde{M}]^{-1} &= [\widetilde{M^{-1}}].
\end{aligned}$$

Für die in (1.19) definierte Matrix \widetilde{K} ist $[\widetilde{K}] = [\widetilde{E}]$ mit $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Die Bijektion g bildet die Untergruppe der Cliffordschen Schiebungen in Γ_ε ab auf die Untergruppe

$$\Sigma := \{[\widehat{S}] \mid S \in [E]\}$$

in $M_{\mathcal{E}}$.

Den Zusammenhang der beiden Gruppen $M_{\mathbb{C}}$ und $M_{\mathcal{E}}$ beschreibt der nächste

Satz 1.11.7 *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{E}} &\rightarrow M_{\mathbb{C}} \\ [\widehat{M}] &\mapsto [M], \\ [\widetilde{M}] &\mapsto [M]_{\kappa} \end{aligned}$$

ist ein Gruppenepimorphismus mit Kern Σ .

Für alle $[\widehat{S}] \in \Sigma$ gilt:

$$\begin{aligned} \forall [\widehat{M}] \in M_{\mathcal{E}} : [\widehat{S}][\widehat{M}] &= [\widehat{M}][\widehat{S}], \\ \forall [\widetilde{M}] \in M_{\mathcal{E}} : [\widehat{S}][\widetilde{M}] &= [\widetilde{M}][\widehat{S}]. \end{aligned}$$

Beweis. Die Verträglichkeit der beiden Gruppenstrukturen folgt aus den unter 1.11.1 und 1.11.4 angegebenen Verknüpfungsregeln.

Für $[\widehat{M}] \in M_{\mathcal{E}}$ ist

$$[\widehat{S}][\widehat{M}] = [\widehat{SM}] = [\widehat{MS}] = [\widehat{M}][\widehat{S}]$$

und für $[\widetilde{M}] \in M_{\mathcal{E}}$ ist

$$[\widehat{S}][\widetilde{M}] = [\widehat{S}][\widetilde{K}][\widehat{M}] = [\widetilde{K}][\widehat{S}][\widehat{M}] = [\widetilde{K}][\widehat{M}][\widehat{S}] = [\widetilde{M}][\widehat{S}],$$

wobei \widetilde{K} die in (1.19) definierte Matrix ist und Satz 1.7.2, (1.20) sowie Regel (1.21) angewandt werden. \square

1.11.8 Mit Hilfe der eingeführten Gruppen $M_{\mathbb{C}} \cong \Gamma_{\mathbb{C}}$ und $M_{\mathcal{E}} \cong \Gamma_{\mathcal{E}}$ läßt sich nun die Äquivalenz von Möbius-Transformationen bzw. von netzerhaltenden Kollineationen in einer Weise formulieren, die für die Klassifizierung der Gruppe der netzerhaltenden Kollineationen gut geeignet ist.

In Entsprechung zu (1.14) gilt für die Äquivalenz von gleichsinnigen Möbius-Transformationen:

$$[M_1] \sim [M_2] \Leftrightarrow \exists T \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) : [M_2] \in \{[T^{-1}M_1T], [T^{-1}\overline{M_1}T]\}. \quad (1.27)$$

Für gegensinnige Möbius-Transformationen gilt entsprechend (1.15):

$$[M_1]_{\kappa} \sim [M_2]_{\kappa} \Leftrightarrow \exists T \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) : [M_2]_{\kappa} \in \{[T^{-1}M_1T]_{\kappa}, [T^{-1}\overline{M_1}T]_{\kappa}\}. \quad (1.28)$$

Für zwei netzerhaltende Kollineationen $f, g \in \Gamma_{\mathcal{E}}$ definieren wir die Äquivalenz:

$$f \sim g :\Leftrightarrow \exists h \in \Gamma_\varepsilon : g = hfh^{-1}.$$

Aufgrund des Gruppenepimorphismus $M_\varepsilon \rightarrow M_\mathbb{C}$ (Satz 1.11.7) werden äquivalente Elemente in $M_\varepsilon \cong \Gamma_\varepsilon$ auf äquivalente Elemente in $M_\mathbb{C} \cong \Gamma_\mathbb{C}$ abgebildet. Das heißt, dass man zu jeder Äquivalenzklasse von Möbius-Transformationen die “darüber liegende” Menge von Kollineationen (siehe Satz 1.8.1) zu klassifizieren hat.

Innerhalb der Gruppe M_ε drückt sich die Äquivalenz in Γ_ε unter Berücksichtigung der Inversenbildung (Bem. 1.11.6) folgendermaßen aus:

$$[\widehat{M}_1] \sim [\widehat{M}_2] \Leftrightarrow \exists T \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) : [\widehat{M}_2] \in \{[T^{-1}][\widehat{M}_1][T], [\widetilde{T}^{-1}][\widehat{M}_1][\widetilde{T}]\} \quad (1.29)$$

bzw.

$$[\widetilde{M}_1] \sim [\widetilde{M}_2] \Leftrightarrow \exists T \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) : [\widetilde{M}_2] \in \{[T^{-1}][\widetilde{M}_1][T], [\widetilde{T}^{-1}][\widetilde{M}_1][\widetilde{T}]\}. \quad (1.30)$$

Wir benötigen für die nächsten beiden Abschnitte zwei kleine Hilfssätze:

Lemma 1.11.9 Seien $M_1, M_2, M_3 \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$.

Dann ist:

$$M_1 \widehat{M_2 M_3} = \widetilde{M_1} \widehat{M_2} \widetilde{M_3}, \quad (1.31)$$

$$\widehat{M_1 M_2 M_3} = \widehat{M_1} \widehat{M_2} \widehat{M_3}, \quad (1.32)$$

$$M_1 \widetilde{M_2 M_3} = \widetilde{M_1} \widetilde{M_2} \widetilde{M_3}. \quad (1.33)$$

Beweis. Wir verwenden Satz 1.7.2, (1.20) und (1.21):

$$M_1 \widehat{M_2 M_3} = \widehat{M_1} \widehat{M_2 M_3} = \widehat{M_1} \widetilde{K} \widehat{M_2} \widetilde{K} \widehat{M_3} = \widetilde{M_1} \widehat{M_2} \widetilde{M_3}.$$

$$M_1 \widetilde{M_2 M_3} = \widetilde{K} \widehat{M_1} \widetilde{M_2 M_3} = \widetilde{K} \widehat{M_1} \widehat{M_2} \widehat{M_3} = \widehat{M_1} \widetilde{K} \widehat{M_2} \widetilde{M_3} = \widetilde{M_1} \widetilde{M_2} \widetilde{M_3}.$$

$$M_1 \widetilde{M_2} M_3 = \widetilde{K} \widehat{M_1} \widetilde{M_2} M_3 = \widetilde{K} \widehat{M_1} \widehat{M_2} \widehat{M_3} = \widetilde{M_1} \widetilde{K} \widehat{M_2} \widetilde{K} \widehat{M_3} = \widetilde{M_1} \widetilde{M_2} \widetilde{M_3}. \quad \square$$

Lemma 1.11.10 Für alle $M \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ und für alle $t \in \mathbb{C}$ mit $|t| = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} [\widehat{M}] &\sim [\widehat{M}], \\ [t\widetilde{M}] &\sim [\widetilde{M}] \sim [t\widehat{M}]. \end{aligned}$$

Beweis. Für $T := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $\widetilde{K} = \widetilde{T} = \widetilde{T}^{-1}$ und mit Regel (1.21) ist $[\widehat{M}] = [\widetilde{K}][\widehat{M}][\widetilde{K}] = [\widetilde{T}^{-1}][\widehat{M}][T]$, also $[\widehat{M}] \sim [\widehat{M}]$.

Wegen $|t| = 1$ ist $t = e^{i\varphi}$ für ein $\varphi \in [0, 2\pi)$. Wir setzen $T := \begin{pmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}$.

Dann ist $t\bar{T} = T$ und folglich $t\bar{T}M = TM = MT$, also $tM = \bar{T}^{-1}MT$.

Daraus ergibt sich mit (1.32): $[t\widetilde{M}] = [\widetilde{T}^{-1}MT] = [\widetilde{T}^{-1}][\widetilde{M}][\widetilde{T}]$, also ist $[t\widetilde{M}] \sim [\widetilde{M}]$.

Wie zuvor ist auch $t\bar{M} = \bar{T}^{-1}\bar{M}T$.

Daraus folgt mit (1.33): $[t\widetilde{\bar{M}}] = [\widetilde{\bar{T}}^{-1}\bar{M}T] = [\widetilde{\bar{T}}^{-1}][\widetilde{\bar{M}}][\widetilde{\bar{T}}]$, also ist $[t\widetilde{\bar{M}}] \sim [\widetilde{\bar{M}}]$. \square

1.11.11 Klassifizierung der gleichsinnigen netzerhaltenden Kollineationen:

Wir beginnen mit den Cliffordschen Schiebungen:

Satz 1.11.12 Für zwei Cliffordsche Schiebungen $[\widehat{S}_1], [\widehat{S}_2] \in \Sigma$ gilt:

$$[\widehat{S}_1] \sim [\widehat{S}_2] \Leftrightarrow [\widehat{S}_2] \in \{[\widehat{S}_1], [\widehat{S}_1]\}. \quad (1.34)$$

Beweis. $[\widehat{S}_1] \sim [\widehat{S}_2] \Leftrightarrow \exists T \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} [\widehat{S}_2] &\in \{[\widehat{T}^{-1}][\widehat{S}_1][\widehat{T}], [\widetilde{\bar{T}}^{-1}][\widehat{S}_1][\widetilde{\bar{T}}]\} \\ &= \{[\widehat{T}]^{-1}[\widehat{T}][\widehat{S}_1], [\widetilde{\bar{T}}]^{-1}[\widetilde{\bar{T}}][\widehat{S}_1]\} \\ &= \{[\widehat{S}_1], [\widehat{S}_1]\} \end{aligned}$$

mit Bemerkung 1.11.6 und Satz 1.11.7. \square

Im nächsten Satz wird gezeigt, wann zwei “über Drehstreckungen mit Zentrum 0 liegende” Kollineationen äquivalent sind (siehe Tabelle 1.1):

Satz 1.11.13 Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ mit $\text{Im}(\alpha) \geq 0, |\alpha| \geq 1$ und $\alpha \neq 1$.

Seien $[\widehat{M}_1], [\widehat{M}_2] \in \{[\widehat{M}] \mid M \in [A]\}$, also $M_1 := \sigma_1 A, M_2 := \sigma_2 A$ mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}^\times$.

Dann gilt:

$$[\widehat{M}_1] \sim [\widehat{M}_2] \Leftrightarrow \begin{cases} [\widehat{M}_2] = [\widehat{M}_1] & \text{für } \text{Im}(\alpha) > 0, |\alpha| > 1 \\ [\widehat{M}_2] \in \{[\widehat{M}_1], [\widehat{M}_1]\} & \text{für } \text{Im}(\alpha) = 0, |\alpha| \geq 1 \\ [\widehat{M}_2] \in \{[\widehat{M}_1], [\overline{\alpha\sigma_1}A]\} & \text{für } \text{Im}(\alpha) > 0, |\alpha| = 1 \end{cases} \quad (1.35)$$

Beweis. Mit Hilfe von (1.31) und Satz 1.7.2 gilt:

$$\begin{aligned}
[\widehat{M}_1] \sim [\widehat{M}_2] &\Leftrightarrow \exists T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) : [\widehat{M}_2] \in \{[\widehat{T^{-1}}][\widehat{M}_1][\widehat{T}], [\widetilde{T^{-1}}][\widehat{M}_1][\widetilde{T}]\} \\
&\Leftrightarrow \exists T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) : [\widehat{M}_2] \in \{[T^{-1}\widehat{M}_1T], [T^{-1}\widehat{\overline{M}_1}T]\} \\
&\Leftrightarrow \exists T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \exists u \in \mathbb{R}^\times : \widehat{M}_2 \in \{uT^{-1}\widehat{M}_1T, uT^{-1}\widehat{\overline{M}_1}T\} \\
&\Leftrightarrow \exists T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \exists u \in \mathbb{R}^\times : M_2 \in \{uT^{-1}M_1T, uT^{-1}\overline{M}_1T\} \\
&\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^\times : \mathrm{Det}(M_2) \in \{u^2 \mathrm{Det}(M_1), u^2 \mathrm{Det}(\overline{M}_1)\} \\
&\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^\times : \sigma_2^2 \alpha \in \{(u\sigma_1)^2 \alpha, (u\overline{\sigma_1})^2 \overline{\alpha}\} \\
&\Rightarrow \exists u \in \mathbb{R}^\times : \sigma_2 \in \left\{u\sigma_1, -u\sigma_1, \frac{u}{|\alpha|} \overline{\sigma_1 \alpha}, -\frac{u}{|\alpha|} \overline{\sigma_1 \alpha}\right\}.
\end{aligned}$$

Aus $\sigma_2 \in \{u\sigma_1, -u\sigma_1\}$ folgt $[\widehat{M}_2] = [\widehat{M}_1]$ und aus $\sigma_2 \in \left\{\frac{u}{|\alpha|} \overline{\sigma_1 \alpha}, -\frac{u}{|\alpha|} \overline{\sigma_1 \alpha}\right\}$ folgt mit $M_2 = uT^{-1}\overline{M}_1T$, daß $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$ oder $\alpha\overline{\alpha} = 1$.

Für $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$ ergibt sich ($u \in \mathbb{R}^\times$)

$$[\widehat{M}_2] = [\widehat{\sigma_2 A}] = [\pm \frac{u\overline{\alpha}}{|\alpha|} \overline{\sigma_1} A] = [\overline{\sigma_1} A] = [\sigma_1 A] = [\widehat{M}_1]$$

und für $\alpha\overline{\alpha} = 1$ ist

$$[\widehat{M}_2] = [\widehat{\sigma_2 A}] = [\pm \frac{u}{|\alpha|} \overline{\alpha \sigma_1} A] = [\overline{\alpha \sigma_1} A].$$

Die Umkehrung des Satzes folgt im Fall $\mathrm{Im}(\alpha) = 0, |\alpha| \geq 1$ mit Lemma 1.11.10 und im Fall $\mathrm{Im}(\alpha) > 0, |\alpha| = 1$ ist $\alpha\overline{\alpha} = 1$ und deshalb

$$\overline{\alpha \sigma_1} A = T^{-1} \overline{\sigma_1 A} T \text{ mit } T := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit (1.31) folgt:

$$[\overline{\alpha \sigma_1} A] = [T^{-1} \widehat{\sigma_1 A} T] = [\widetilde{T^{-1}} \widehat{\sigma_1 A} \widetilde{T}] = [\widetilde{T^{-1}}][\widehat{M}_1][\widetilde{T}], \text{ also } [\overline{\alpha \sigma_1} A] \sim [\widehat{M}_1]. \quad \square$$

Der folgende Satz macht eine Aussage über die Äquivalenz zweier netzerhaltender Kollineationen, die “über Translationen längs \mathbb{R}_∞ liegen” (siehe Tabelle 1.1):

Satz 1.11.14 Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Seien $[\widehat{M}_1], [\widehat{M}_2] \in \{[\widehat{M}] \mid M \in [A]\}$, also $M_1 := \sigma_1 A, M_2 := \sigma_2 A$ mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}^\times$.

Dann gilt:

$$[\widehat{M}_1] \sim [\widehat{M}_2] \Leftrightarrow [\widehat{M}_2] \in \{[\widehat{M}_1], [\widehat{\overline{M}_1}]\} \quad (1.36)$$

Beweis. Analog zu Beweis von Satz 1.11.13 im Fall $\text{Im}(\alpha) = 0$. \square

Mit Hilfe der letzten drei Sätze läßt sich nun - korrespondierend zu Tabelle 1.1 - die Tabelle 1.3 mit Repräsentanten der Äquivalenzklassen gleichsinniger netzerhaltender Kollineationen erstellen. Dazu seien folgende Teilmengen von \mathbb{C}^\times definiert:

$$\text{offener Einheitshalbkreis} = H := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1, \text{Im}(z) > 0\},$$

$$\text{Einheitsviertelkreis} = V := \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1, \text{Re}(z) \geq 0, \text{Im}(z) \geq 0\}.$$

Bemerkung 1.11.15 Erklärung zur Menge $\frac{\bar{\alpha}-1}{|\bar{\alpha}-1|}V$ im Fall GLS-II-B in Tabelle 1.3:

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^\times &\rightarrow \mathbb{C}^\times \\ \sigma &\mapsto \bar{\alpha}\bar{\sigma} \end{aligned}$$

ist eine Spiegelung an der Geraden durch 0 und $(\bar{\alpha}-1)i$. Nach Satz 1.11.13 sind $[\widehat{\sigma A}]$ und $[\widehat{\bar{\alpha}\bar{\sigma} A}]$ äquivalent, sodaß also durch den Viertelkreis $\frac{\bar{\alpha}-1}{|\bar{\alpha}-1|}V$, der an der Geraden anliegt, ein korrektes Vertretersystem beschrieben wird.

Bemerkung 1.11.16 Erklärung zu den Fixpunktmenge in Tabelle 1.3:

Zur Bestimmung der reellen Fixpunkte der gleichsinnigen netzerhaltenden Kollineationen geht man aus von den jeweiligen Fixgeraden des Netzes \mathcal{E} (siehe Tabelle 1.1).

Im Fall der Cliffordschen Schiebungen gibt es nur dann Fixpunkte, wenn es sich um die Identität handelt (vgl. Satz 1.9.3), also wenn $\text{Im}(\sigma) = 0$, was nur von $\sigma = 1 \in V$ erfüllt wird.

Im Fall GLS-II-A und GLS-II-B, also wenn $\text{Im}(\alpha) > 0$, ist die Kollineation identisch auf g_0 genau dann, wenn $\text{Im}(\sigma) = 0$. Das einzige $\sigma \in H$ mit dieser Eigenschaft ist $\sigma = 1$.

Die Identität auf g_∞ liegt vor genau dann, wenn $\text{Im}(\alpha\sigma) = 0$, denn ansonsten hätte man auf g_∞ eine elliptische Projektivität (vgl. die Definition von \widehat{M} (1.16) und Lemma 1.9.1).

Im Fall GLS-II-B kommt g_0 als Fixpunktgerade nicht vor, weil es für kein α ein $\sigma \in \frac{\bar{\alpha}-1}{|\bar{\alpha}-1|}V$ mit $\text{Im}(\sigma) = 0$ gibt.

Der Fall $\text{Im}(\alpha\sigma) = 0$ ist möglich, z.B. für $\alpha = i$ und $\sigma = \frac{\bar{\alpha}-1}{|\bar{\alpha}-1|}e^{i\frac{\pi}{4}} = -i$.

Im Fall GLS-II-C, also wenn $\text{Im}(\alpha) = 0$, ist die Kollineation identisch auf g_0 und auf g_∞ genau dann, wenn $\text{Im}(\sigma) = 0$. Das einzige $\sigma \in V$ mit dieser Eigenschaft ist $\sigma = 1$.

Der Fall GLS-III erklärt sich durch GLS-I, da $\widehat{\begin{pmatrix} \sigma & \sigma \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}} = \widehat{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \widehat{\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}}$ und die Kollineation mit Abbildungsmatrix $\widehat{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ genau g_∞ als Fixpunktmenge besitzt.

Bez.	Koll. / Param.	Matrix	reelle Fixpunkte
GLS-I	Cliff. Schieb.	$\widehat{\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}}$ $\sigma \in V$	$\sigma = 1 : \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$
GLS-II-A	$\text{Im}(\alpha) > 0$ $ \alpha > 1$	$\widehat{\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \alpha\sigma \end{pmatrix}}$ $\sigma \in H \cup \{1\}$	$\sigma = 1 : g_0$ $\text{Im}(\alpha\sigma) = 0 : g_\infty$
GLS-II-B	$\text{Im}(\alpha) > 0$ $ \alpha = 1$	$\widehat{\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \alpha\sigma \end{pmatrix}}$ $\sigma \in \frac{\bar{\alpha}-1}{ \bar{\alpha}-1 } V$	$\text{Im}(\alpha\sigma) = 0 : g_\infty$
GLS-II-C	$\text{Im}(\alpha) = 0$ $ \alpha \geq 1, \alpha \neq 1$	$\widehat{\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \alpha\sigma \end{pmatrix}}$ $\sigma \in V$	$\sigma = 1 : g_0, g_\infty$
GLS-III		$\widehat{\begin{pmatrix} \sigma & \sigma \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}}$ $\sigma \in V$	$\sigma = 1 : g_\infty$

Tabelle 1.3: Repräsentanten gleichsinniger netzerhaltender Kollineationen.

1.11.17 Klassifizierung der gegenseitigen netzerhaltenden Kollineationen:

Wir beginnen mit “über Inversionen an \mathbb{R}_∞ liegenden” netzerhaltenden Kollineationen (siehe Tabelle 1.2):

Satz 1.11.18 Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Seien $[\widetilde{M}_1], [\widetilde{M}_2] \in \{[\widetilde{M}] \mid M \in [A]_\kappa\}$, also $M_1 := \sigma_1 A, M_2 := \sigma_2 A$ mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}^\times$.

Dann gilt:

$$[\widetilde{M}_1] \sim [\widetilde{M}_2] \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{C}^\times, |t| = 1 : [\widetilde{M}_2] \in \{[t\widetilde{M}_1], [t\widetilde{M}_1]\} \quad (1.37)$$

Beweis. Mit Hilfe von (1.32) und (1.33) und wegen der Injektivität des Operators \sim

gilt:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{M}_1] \sim [\widetilde{M}_2] &\Leftrightarrow \exists T \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) : [\widetilde{M}_2] \in \{[\widehat{T^{-1}}][\widetilde{M}_1][\widehat{T}], [\widetilde{T^{-1}}][\widetilde{M}_1][\widetilde{T}]\} \\
&\Leftrightarrow \exists T \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) : [\widetilde{M}_2] \in \{[\widetilde{T^{-1}}M_1T], [\widetilde{T^{-1}}\widetilde{M}_1\widetilde{T}]\} \\
&\Leftrightarrow \exists T \in \text{GL}_2(\mathbb{C}), \exists u \in \mathbb{R}^\times : \widetilde{M}_2 \in \{u\widetilde{T^{-1}}M_1T, u\widetilde{T^{-1}}\widetilde{M}_1\widetilde{T}\} \\
&\Leftrightarrow \exists T \in \text{GL}_2(\mathbb{C}), \exists u \in \mathbb{R}^\times : M_2 \in \{u\overline{T^{-1}}M_1T, u\overline{T^{-1}}\overline{M}_1\overline{T}\} \\
&\Rightarrow \exists t \in \mathbb{C}^\times, \exists u \in \mathbb{R}^\times : \text{Det}(M_2) \in \{u^2t\overline{t}^{-1}\text{Det}(M_1), u^2t\overline{t}^{-1}\text{Det}(\overline{M}_1)\} \\
&\Rightarrow \exists t \in \mathbb{C}^\times, \exists u \in \mathbb{R}^\times : \sigma_2^2 \in \{(u\sigma_1 \frac{t}{|t|})^2, (u\overline{\sigma}_1 \frac{t}{|t|})^2\} \\
&\Rightarrow \exists t \in \mathbb{C}^\times, |t| = 1, \exists u \in \mathbb{R}^\times : \sigma_2 \in \{u\sigma_1 t, -u\sigma_1 t, u\overline{\sigma}_1 t, -u\overline{\sigma}_1 t\} \\
&\Rightarrow \exists t \in \mathbb{C}^\times, |t| = 1 : [\widetilde{M}_2] \in \{[t\widetilde{M}_1], [\widetilde{t\overline{M}_1}]\}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit Lemma 1.11.10 ergibt sich die Behauptung. \square

Ganz analog wird der folgende Satz über die Äquivalenz von “über Streck-Inversionen längs \mathbb{R}_∞ ” bzw. “über Gleit-Inversionen längs \mathbb{R}_∞ liegenden” netzerhaltenden Kollineationen bewiesen (siehe Tabelle 1.2):

Satz 1.11.19 Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$, $1 < u \in \mathbb{R}$ bzw. $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Seien $[\widetilde{M}_1], [\widetilde{M}_2] \in \{[\widetilde{M}] \mid M \in [A]_\kappa\}$, also $M_1 := \sigma_1 A, M_2 := \sigma_2 A$ mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}^\times$.

Dann gilt:

$$[\widetilde{M}_1] \sim [\widetilde{M}_2] \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{C}^\times, |t| = 1 : [\widetilde{M}_2] \in \{[t\widetilde{M}_1], [\widetilde{t\overline{M}_1}]\} \quad (1.38)$$

Zuletzt zur Äquivalenz von “über Dreh-Inversionen am Einheitskreis liegenden” netzinvarianten Kollineationen (siehe Tabelle 1.2):

Satz 1.11.20 Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, $\text{Im}(\alpha) \geq 0, |\alpha| = 1, \alpha \neq 1$.

Seien $[\widetilde{M}_1], [\widetilde{M}_2] \in \{[\widetilde{M}] \mid M \in [A]_\kappa\}$, also $M_1 := \sigma_1 A, M_2 := \sigma_2 A$ mit $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{C}^\times$.

Dann gilt:

$$[\widetilde{M}_1] \sim [\widetilde{M}_2] \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{C}^\times, |t| = 1 : \begin{cases} [\widetilde{M}_2] \in \{[t\widetilde{M}_1], [\widetilde{t\overline{M}_1}]\} & \text{für } \text{Im}(\alpha) = 0 \\ [\widetilde{M}_2] \in \{[t\widetilde{M}_1], [\widetilde{t\alpha\overline{\sigma}_1 A}]\} & \text{für } \text{Im}(\alpha) > 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

Beweis. Die ersten drei (weggelassenen) Äquivalenzen sind identisch mit jenen im Beweis des Satzes 1.11.18:

$$\begin{aligned}
[\widetilde{M}_1] \sim [\widetilde{M}_2] &\Leftrightarrow \exists T \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}), \exists u \in \mathbb{R}^\times : M_2 \in \{u\overline{T}^{-1}M_1T, u\overline{T}^{-1}\overline{M}_1T\} \\
&\Rightarrow \exists t \in \mathbb{C}^\times, \exists u \in \mathbb{R}^\times : \mathrm{Det}(M_2) \in \{u^2t\overline{t}^{-1}\mathrm{Det}(M_1), u^2t\overline{t}^{-1}\mathrm{Det}(\overline{M}_1)\} \\
&\Rightarrow \exists t \in \mathbb{C}^\times, |t| = 1, \exists u \in \mathbb{R}^\times : \sigma_2^2 \in \{(u\sigma_1t)^2, (u\overline{\sigma}_1\overline{\alpha}t)^2\} \\
&\Rightarrow \exists t \in \mathbb{C}^\times, |t| = 1, \exists u \in \mathbb{R}^\times : \sigma_2 \in \{u\sigma_1t, -u\sigma_1t, u\overline{\sigma}_1\overline{\alpha}t, -u\overline{\sigma}_1\overline{\alpha}t\} \\
&\Rightarrow \exists t \in \mathbb{C}^\times, |t| = 1 : [\widetilde{M}_2] \in \{[t\widetilde{M}_1], [t\overline{\alpha}\overline{\sigma}_1A]\}.
\end{aligned}$$

Die umgekehrte Behauptung des Satzes folgt für $[\widetilde{M}_2] = [t\widetilde{M}_1]$ mit Lemma 1.11.10.

Ist $[\widetilde{M}_2] = [t\overline{\alpha}\overline{\sigma}_1A]$, $t \in \mathbb{C}^\times$ mit $|t| = 1$, also $t = e^{i\varphi}$ für ein $\varphi \in [0, 2\pi)$, so gilt:

$\overline{T}^{-1}\overline{AT} = t\overline{\alpha}A$, wobei $T := \begin{pmatrix} 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \\ e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \end{pmatrix}$. Somit ist $t\overline{\alpha}\overline{\sigma}_1A = \overline{T}^{-1}\overline{\sigma}_1\overline{AT}$ und mit (1.33)

weiter $[t\overline{\alpha}\overline{\sigma}_1A] = [\overline{T}^{-1}\overline{\sigma}_1\overline{AT}] = [\overline{T}^{-1}][\overline{\sigma}_1A][\overline{T}] = [\overline{T}^{-1}][\widetilde{M}_1][\overline{T}]$. Nach (1.30) ist also $[t\overline{\alpha}\overline{\sigma}_1A] \sim [\widetilde{M}_1]$. \square

Bemerkung 1.11.21 Im Grunde besagt Satz 1.11.20, dass genau die Menge der komplexen Vielfachen einer Matrix A mit $\mathrm{Im}(\alpha) \geq 0$, $|\alpha| = 1$, $\alpha \neq 1$ jeweils eine Äquivalenzklasse gegensinniger netzinvarianter Kollineationen dieses Typs darstellt, da zwei Matrizen A mit verschiedenen α 's \mathbb{C} -linear unabhängig sind.

Korrespondierend zu Tabelle 1.2 erhalten wir schließlich unter Benutzung der letzten drei Sätze die Tabelle 1.4 mit Repräsentanten der Äquivalenzklassen gegensinniger netzerhaltender Kollineationen. Dazu notieren wir folgende Punkte in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
P_0 &:= (1, 0, 0, 0)\mathbb{R}, \\
P_x &:= (0, 1, 0, 0)\mathbb{R}, \\
P_y &:= (0, 0, 1, 0)\mathbb{R}, \\
P_z &:= (0, 0, 0, 1)\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 1.11.22 Erklärung zu den Fixpunkt Mengen in Tabelle 1.4:

Reelle Fixpunkte der gegensinnigen netzerhaltenden Kollineationen können höchstens auf den jeweiligen Fixstrahlen des elliptischen Netzes \mathcal{E} existieren (siehe Tabelle 1.2).

Im Fall GGS-I handelt es sich, wie schon in Bemerkung 1.7.6 gesagt, um eine harmonische axiale Kollineation mit den beiden Achsen $P_0 \vee P_x$ und $P_y \vee P_z$, das ist eine Drehung um die x-Achse um 180 Grad. Ihre Fixpunkte sind also genau die Punkte dieser beiden Achsen.

Die Fälle GGS-II und GGS-III sind leicht nachzurechnen; mehr als die genannten Fixpunkte kann es nicht geben, da die zu Grunde liegende Möbius-Transformation nur 2 bzw. 1 Fixpunkt besitzt.

Bei GGS-IV bleibt kein Netzstrahl fix, sodass also auch kein Fixpunkt vorhanden sein kann.

Bez.	Parameter	Matrix	reelle Fixpunkte
GGs-I		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$P_0 \vee P_x, P_y \vee P_z$
GGs-II	$1 < u \in \mathbb{R}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}$	P_0, P_x, P_y, P_z
GGs-III		$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	P_x, P_y
GGs-IV	$\text{Im}(\alpha) \geq 0, \alpha = 1, \alpha \neq 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$	\emptyset

Tabelle 1.4: Repräsentanten gegensinniger netzerhaltender Kollineationen.

Kapitel 2

Die elliptische Netzprojektion

2.1 Elliptisches Netz und Bildebene

Die Netzprojektion ist eine Abbildung des dreidimensionalen projektiven Raumes auf eine Bildebene mittels der Geraden einer linearen Kongruenz (eines Strahlnetzes). Je nachdem, ob das abbildende Netz hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch ist, heißt auch die Netzprojektion hyperbolisch, elliptisch bzw. parabolisch. In diesem Kapitel sollen Eigenschaften der elliptischen Netzprojektion¹ behandelt werden. Es sind also gegeben:

$\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, ein elliptisches Netz \mathcal{E} , eine Bildebene μ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Um an das Kapitel 1 anzuschließen, wollen wir spezieller, doch ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, das dort beschriebene elliptische Netz \mathcal{E} mit den Leitgeraden $u = (1, 0, 0, -i)\mathbb{C} \vee (0, 1, -i, 0)\mathbb{C}$ und $v = (1, 0, 0, i)\mathbb{C} \vee (0, 1, i, 0)\mathbb{C}$ und die Bildebene $\mu : x_3 = 0$ verwenden.

Durch jeden Punkt $P \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ geht genau ein Netzstrahl $s_P \in \mathcal{E}$ und in jeder Ebene $\varepsilon \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ liegt genau ein Netzstrahl $s_\varepsilon \in \mathcal{E}$.

Durch das elliptische Netz \mathcal{E} ist μ als reelle Möbiusebene in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ eingebettet (uneigentlicher Punkt ist der Netzstrahl s_μ). Alle Kollineationen in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, die die Netzstrahlmenge \mathcal{E} invariant lassen, sind auffassbar als Möbiustransformationen in μ . Dabei entsprechen der Identität in μ genau jene Kollineationen in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, die die Menge \mathcal{E} strahlenweise invariant lassen. Diese sind die Cliffordschen Schiebungen. Unter diesen Cliffordschiebungen gibt es genau eine involutorische $I_{\mathcal{E}}$. Mit Satz 1.9.3 läßt sich zeigen, dass sie die Abbildungsmatrix

¹auch windschiefe Projektion genannt

$$\widehat{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt (siehe (1.16)).

Mit Hilfe von $I_{\mathcal{E}}$ lassen sich nun die Begriffe “parallel” und “orthogonal” bestimmen:

In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ wird die Ebene

$$\omega := I_{\mathcal{E}}(\mu) \tag{2.1}$$

als Fernebene ausgezeichnet. Die Fernebene ω besteht aus allen Punkten in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ mit $x_0 = 0$. Durch sie ist in μ der Netzstrahl $s_{\mu} = \omega \cap \mu$ als Ferngerade ausgezeichnet.

Definition 2.1.1 Zwei eigentliche Unterräume (Gerade oder Ebene) U, T von $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ heißen parallel, in Zeichen $U \parallel T$, falls $(U \cap \omega) \subset (T \cap \omega)$ oder $(T \cap \omega) \subset (U \cap \omega)$.

Definition 2.1.2 Zwei eigentliche Unterräume (Gerade oder Ebene) U, T von $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ heißen orthogonal, in Zeichen $U \perp T$, falls die affinen Unterräume $(U \setminus \omega)$ und $(T \setminus \omega)$ orthogonal sind, d.h. falls deren zugehörige Vektorräume bzgl. des kanonischen Skalarprodukts in \mathbb{R}^3 orthogonal sind.

Bemerkung 2.1.3 Für eigentliche Geraden g, h in μ kann man auch sagen: $g \perp h \Leftrightarrow I_{\mathcal{E}}(g \cap s_{\mu}) = h \cap s_{\mu}$.

Bemerkung 2.1.4 Bezüglich des kanonischen Skalarprodukts in \mathbb{R}^3 fassen wir $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus \omega$ als metrisch-affinen Raum auf.

Im weiteren Verlauf wird die Bildebene μ sinngemäß entweder als durch die uneigentliche Gerade $s_{\mu} \in \mathcal{E}$ projektiv abgeschlossene Ebene oder durch den “Punkt” s_{μ} konform abgeschlossene Möbiusebene aufgefaßt.

Auf eine Bedeutungsänderung in der Notation sei noch hingewiesen, auch wenn aus dem Kontext heraus keine Zweideutigkeitsprobleme entstehen sollten:

Im Gegensatz zu Kapitel 1 verstehen wir ab jetzt unter

$$g_{\infty}, s_{\infty}, \dots$$

immer den uneigentlichen Punkt der Geraden g bzw. s usw.

2.2 Die Netzbilder von Punkten, Ebenen und Geraden

Definition 2.2.1 Ist P ein Punkt in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus s_\mu$ und $s_P \in \mathcal{E}$ der eindeutig bestimmte Netzstrahl durch P , so ist $s_P \cap \mu$ das **Netzbild des Punktes** P in μ .

Das Netzbild eines Punktes $P \in s_\mu$ ist der dem Netzstrahl s_μ entsprechende uneigentliche Punkt der Möbiusebene μ . (Abb. 2.1).

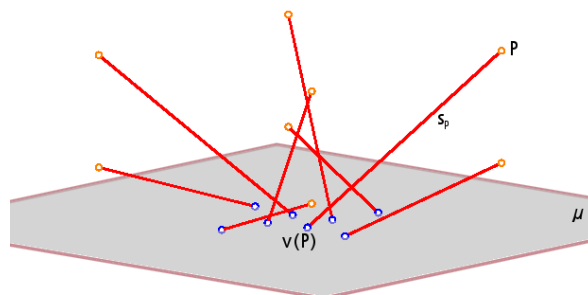


Abbildung 2.1: Netzbilder von Punkten

Definition 2.2.2 Ist ε eine eigentliche Ebene in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, $\varepsilon \not\parallel \mu$, und $s_\varepsilon \in \mathcal{E}$ der eindeutig bestimmte Netzstrahl in ε , so ist $s_\varepsilon \cap \mu$ das **Netzbild der Ebene** ε in μ .

Das Netzbild einer Ebene $\varepsilon \parallel \mu$ bzw. der uneigentlichen Ebene ω ist der dem Netzstrahl s_μ entsprechende uneigentliche Punkt der Möbiusebene μ . (Abb. 2.2).

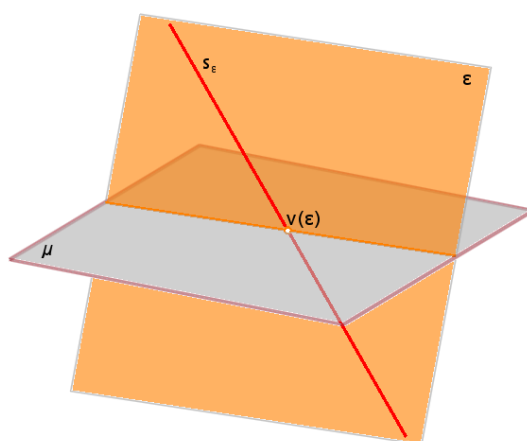


Abbildung 2.2: Netzbild einer Ebene

Bemerkung 2.2.3 Wir bezeichnen die durch 2.2.1 und 2.2.2 erklärte Abbildung

$$\nu : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mu$$

als die zum elliptischen Netz \mathcal{E} und zur Bildebene μ gehörende *elliptische Netzprojektion*.

Definition 2.2.4 Ist g eine Gerade in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, so ist

$$\nu(g) = \{\nu(P) \mid P \in g\} = \{\nu(\varepsilon) \mid g \subset \varepsilon\}$$

das **Netzbild der Geraden** g in μ . (Abb. 2.3).

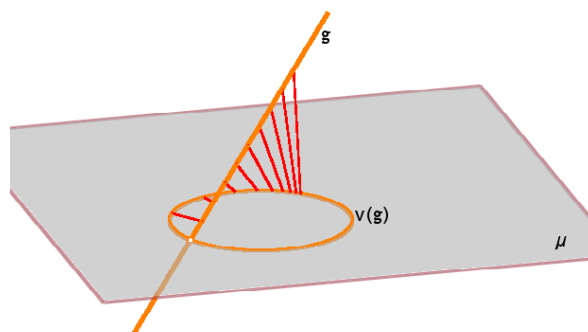


Abbildung 2.3: Netzbild einer Geraden

Bemerkung 2.2.5 Jede eigentliche Ebene $\varepsilon \not\parallel \mu$ wird durch ihre Spur $\varepsilon \cap \mu$ und ihr Netzbild $\nu(\varepsilon)$, also durch das Paar $(\varepsilon \cap \mu, \nu(\varepsilon))$, umkehrbar eindeutig abgebildet.

Der folgende Satz beschreibt, wie durch die elliptische Netzprojektion ein Punkt bzw. eine Ebene in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ auf den entsprechenden komplexen Bildpunkt in der Bildebene $\mu = \mathbb{C}_\infty$ abgebildet wird:

Satz 2.2.6 Ist $P := (a, b, c, d)\mathbb{R} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ein Punkt, so ist seine Netzprojektion in \mathbb{C}_∞ gegeben durch

$$\nu(P) = (a + di, b + ci)\mathbb{C}. \quad (2.2)$$

Ist $\varepsilon := (a, b, c, d)^T\mathbb{R} \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ eine Ebene, so ist ihre Netzprojektion in \mathbb{C}_∞ gegeben durch

$$\nu(\varepsilon) = (-b + ci, a - di)\mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Beweis. Siehe den Beweis zu Satz 1.4.1. □

Wir benötigen im Weiteren die Begriffe ‘‘Doppelverhältnis’’ und ‘‘Teilverhältnis’’ von vier bzw. drei Punkten, sowohl im projektiven Raum $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ bzw. im affinen Raum $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus \omega$ (siehe Bem. 2.1.4) als auch in \mathbb{C}_∞ bzw. \mathbb{C} . Zur Klärung des Zusammenhangs dieser Begriffe zwischen den jeweiligen Räumen seien sie an dieser Stelle erwähnt, wobei wir uns orientieren an [3] bzw. an [11]:

Definition 2.2.7 Sei g eine Gerade in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ und (P_0, P_1, P) ein projektives Koordinatensystem von g . Ist X ein weiterer Punkt auf g mit den homogenen Koordinaten $(x_0, x_1)\mathbb{R}$ bzgl. (P_0, P_1, P) , so heißt

$$DV(X, P, P_0, P_1) := \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{R}_\infty$$

das Doppelverhältnis der Punkte X, P, P_0, P_1 .

Ist $DV(X, P, P_0, P_1) = -1$, so nennt man (X, P, P_0, P_1) ein *harmonisches* Punktequadrupel oder man sagt, $\{X, P\}$ und $\{P_0, P_1\}$ *trennen sich harmonisch*.

Definition 2.2.8 Sei g eine Gerade in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus \omega$ und $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p})$ ein affines Koordinatensystem von g . Ist \mathbf{x} ein weiterer Punkt auf g mit der affinen Koordinate $x_1 \in \mathbb{R}$ bzgl. $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p})$, also $\mathbf{x} = \mathbf{p}_0 + x_1(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)$, so heißt

$$TV(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_0) := x_1 \in \mathbb{R}$$

das Teilverhältnis der Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_0$.

Satz 2.2.9 Seien $\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_0$ drei kollineare affine Punkte in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus \omega$ mit $\mathbf{p}_0 \neq \mathbf{p}$ und X, P, P_0 die zugehörigen projektiven Punkte auf einer Geraden g in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$TV(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{p}_0) = DV(X, P, P_0, g_\infty),$$

wobei g_∞ der unendlich ferne Punkt auf g ist.

Bemerkung 2.2.10 Aufgrund des vorhergehenden Satzes dürfen wir vom Teilverhältnis dreier *eigentlicher* kollinearere Punkte X, P, P_0 ($P \neq P_0$) in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sprechen. Unter $TV(X, P, P_0)$ verstehen wir dasselbe wie $DV(X, P, P_0, g_\infty)$, wenn X, P, P_0 auf einer Geraden g liegen. Also:

$$TV(X, P, P_0) = DV(X, P, P_0, g_\infty)$$

für eigentliche kollineare Punkte X, P, P_0 .

Nun zum Doppel- und Teilverhältnis in \mathbb{C}_∞ bzw. \mathbb{C} :

Definition 2.2.11 Seien $A = (a_0, a_1)\mathbb{C}$, $B = (b_0, b_1)\mathbb{C}$, $C = (c_0, c_1)\mathbb{C}$, $D = (d_0, d_1)\mathbb{C}$ vier Punkte in \mathbb{C}_∞ , von denen höchstens zwei gleich sind. Dann heißt

$$DV(A, B, C, D) := \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_0 & c_0 \end{pmatrix} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} b_1 & d_1 \\ b_0 & d_0 \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} a_1 & d_1 \\ a_0 & d_0 \end{pmatrix} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_0 & c_0 \end{pmatrix}} \in \mathbb{C}_\infty$$

das Doppelverhältnis von A, B, C, D .

Bemerkung 2.2.12 Wegen der Wohldefiniertheit dieses Doppelverhältnisses, d.h. seiner Unabhängigkeit von der Darstellung der projektiven Punkte A, B, C, D und aufgrund der Vertauschungsregeln

$$DV(A, B, C, D) = DV(D, C, B, A) = DV(B, A, D, C) = DV(C, D, A, B)$$

sei o.B.d.A. angenommen, dass (C, D, B) ein projektives Koordinatensystem von \mathbb{C}_∞ ist. Dann zeigt eine einfache Rechnung, dass das zuletzt definierte Doppelverhältnis mit der Definitionsart des Doppelverhältnisses in Def. 2.2.7 übereinstimmt.

Es wird sich zeigen (Satz 2.2.16), dass die Definition 2.2.11 auch insofern mit der Definition 2.2.7 übereinstimmt, indem man die Punkte $A, B, C, D \in \mathbb{C}_\infty$ interpretiert als Punkte in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, wenn sie kollinear sind.

Definition 2.2.13 Sind A, B, C drei Punkte in \mathbb{C} mit $B \neq C$, so heißt

$$TV(A, B, C) := \frac{C-A}{C-B} \in \mathbb{C}$$

das Teilverhältnis der Punkte A, B, C .

Satz 2.2.14 Sind A, B, C drei Punkte in \mathbb{C} mit $B \neq C$, so ist

$$TV(A, B, C) = DV(A, B, C, \infty).$$

Beweis. einfache Rechnung. □

Das Folgende macht man sich auch leicht klar:

Bemerkung 2.2.15 Sind A, B, C drei Punkte in \mathbb{C} mit $B \neq C$. Dann gilt:

$$\lambda = TV(A, B, C) \Leftrightarrow A = \lambda B + (1 - \lambda)C$$

und weiter

$$A, B, C \text{ sind kollinear} \Leftrightarrow \text{TV}(A, B, C) \in \mathbb{R}.$$

Der nächste Satz unterstreicht die Bedeutung des Doppelverhältnisses für die Netzprojektion:

Satz 2.2.16 Die elliptische Netzprojektion $\nu : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mu$ lässt das Doppelverhältnis invariant.

Genauer gesagt: Sind P, P_0, P_1 drei verschiedene Punkte auf einer Geraden $g \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ mit $g \notin \mathcal{E}$ und ist X ein weiterer Punkt auf g , so gilt

$$\text{DV}(X, P, P_0, P_1) = \text{DV}(\nu(X), \nu(P), \nu(P_0), \nu(P_1)).$$

Entsprechendes gilt für vier Ebenen eines Ebenenbüschels mit einer Trägergeraden $g \notin \mathcal{E}$.

Beweis. Die homogenen Koordinaten der Punkte P_0, P_1 und P seien so gewählt, dass letztere ein projektives Koordinatensystem der Geraden g darstellen, also:

$$\begin{aligned} P_0 &:= \mathbf{b}_0 \mathbb{R} := (a_0, b_0, c_0, d_0) \mathbb{R}, \\ P_1 &:= \mathbf{b}_1 \mathbb{R} := (a_1, b_1, c_1, d_1) \mathbb{R}, \\ P &= (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1) \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hat nun X bzgl. dieses Koordinatensystems die homogenen Koordinaten (x_0, x_1) , also

$$X = (x_0 \mathbf{b}_0 + x_1 \mathbf{b}_1) \mathbb{R},$$

so ist $\text{DV}(X, P, P_0, P_1) := \frac{x_1}{x_0}$ (Def. 2.2.7).

Die Netzprojektionen von P_0 und P_1 sind (Satz 2.2.6)

$$\begin{aligned} \nu(P_0) &= (a_0 + d_0 i, b_0 + c_0 i) \mathbb{C} =: (w_0, w_1) \mathbb{C}, \\ \nu(P_1) &= (a_1 + d_1 i, b_1 + c_1 i) \mathbb{C} =: (z_0, z_1) \mathbb{C} \end{aligned}$$

und damit (wie man leicht nachrechnet) jene von P und X gegeben durch

$$\begin{aligned} \nu(P) &= (w_0 + z_0, w_1 + z_1) \mathbb{C}, \\ \nu(X) &= (x_0 w_0 + x_1 z_0, x_0 w_1 + x_1 z_1) \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Das Doppelverhältnis der netzprojizierten Punkte ist also (Def. 2.2.11)

$$\begin{aligned}
 DV(\nu(X), \nu(P), \nu(P_0), \nu(P_1)) &= \frac{\text{Det} \begin{pmatrix} x_0 w_1 + x_1 z_1 & w_1 \\ x_0 w_0 + x_1 z_0 & w_0 \end{pmatrix} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} w_1 + z_1 & z_1 \\ w_0 + z_0 & z_0 \end{pmatrix}}{\text{Det} \begin{pmatrix} x_0 w_1 + x_1 z_1 & z_1 \\ x_0 w_0 + x_1 z_0 & z_0 \end{pmatrix} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} w_1 + z_1 & w_1 \\ w_0 + z_0 & w_0 \end{pmatrix}} \\
 &= \frac{x_1 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ z_0 & w_0 \end{pmatrix} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} w_1 & z_1 \\ w_0 & z_0 \end{pmatrix}}{x_0 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} w_1 & z_1 \\ w_0 & z_0 \end{pmatrix} \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ z_0 & w_0 \end{pmatrix}} \\
 &= \frac{x_1}{x_0}.
 \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe des Doppelverhältnisses in $\mu = \mathbb{C}_\infty$ lassen sich nun die Möbiuskreise (siehe Def. 1.2.2) charakterisieren (siehe [11]):

Satz 2.2.17 Vier verschiedene Punkte A, B, C, D in \mathbb{C}_∞ liegen genau dann gemeinsam auf einem Möbiuskreis, wenn das Doppelverhältnis $DV(A, B, C, D)$ reell ist.

Satz 2.2.18 Sei g eine eigentliche Gerade in $P^3(\mathbb{R})$.

Ist $g \not\parallel \mu$, so ist das Netzbild $\nu(g)$ ein Kreis (der auch zu einem Punkt entartet sein kann).
Ist $g \parallel \mu$, so ist das Netzbild $\nu(g)$ eine Gerade.

Beweis. Ist $g \in \mathcal{E}$, so ist das Netzbild von g ein Punkt.

Ist $g \notin \mathcal{E}$, so ist das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Punkten auf der Geraden g reell. Nach Satz 2.2.16 ist das Doppelverhältnis der vier Bildpunkte ebenfalls reell. Diese liegen demnach (Satz 2.2.17) gemeinsam auf einem Möbiuskreis.

Dieser Möbiuskreis ist genau dann eine Gerade, wenn der uneigentliche Punkt der Bildebene μ auf ihm liegt, was genau dann der Fall ist, wenn $g \cap s_\infty \neq \emptyset$, also wenn $g \parallel \mu$.

□

Bemerkung 2.2.19 Sind g und h zwei Geraden einer Ebene ε in $P^3(\mathbb{R})$ mit Schnittpunkt S , dann haben die Netzbilder $\nu(g)$ und $\nu(h)$ die Punkte $\nu(S)$ und $\nu(\varepsilon)$ gemeinsam. (Abb. 2.4).

Ist speziell g eine eigentliche Gerade in der Bildebene μ , d.h. $g = \varepsilon \cap \mu$ mit $\varepsilon \neq \mu$ sowie $h \subset \varepsilon$, und ist $\nu(S) = S = \nu(\varepsilon)$, so berührt $\nu(h)$ die Gerade g in S . (Abb. 2.5).

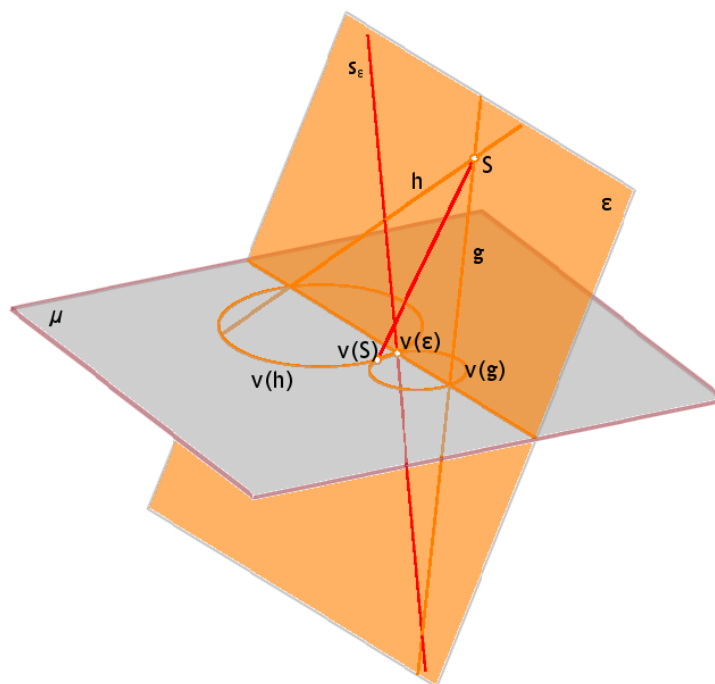


Abbildung 2.4: Bem. 2.2.19

Definition 2.2.20 Den Punkt $\nu(g_\infty)$, das Netzbild des unendlich fernen Punktes einer eigentlichen Geraden g in $P^3(\mathbb{R})$, nennt man den *Netzfluchtpunkt* von g .

Die Gerade $\nu(\epsilon_\infty)$, das Netzbild der unendlich fernen Geraden einer eigentlichen Ebene $\epsilon \not\parallel \mu$ in $P^3(\mathbb{R})$, nennt man die *Netzfluchtspur* von ϵ .

Satz 2.2.21 Ist g eine eigentliche Gerade in $P^3(\mathbb{R})$ und $g \not\parallel \mu$, so ist ihr Netzbild $\nu(g)$ der Kreis mit dem Durchmesser $(g \cap \mu)\nu(g_\infty)$. (Abb. 2.6).

Beweis. Da die Gerade g eigentlichen und nicht parallel zu μ ist, läßt sie sich schreiben als

$$g = (1, b, c, 0)\mathbb{R} \vee (0, d, e, 1)\mathbb{R}$$

für gewisse $b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Es ist somit

$$g \cap \mu = (1, b + ci)\mathbb{C}$$

und

$$\nu(g_\infty) = \nu((0, d, e, 1)\mathbb{R}) = (i, d + ei)\mathbb{C} = (1, e - di)\mathbb{C}.$$

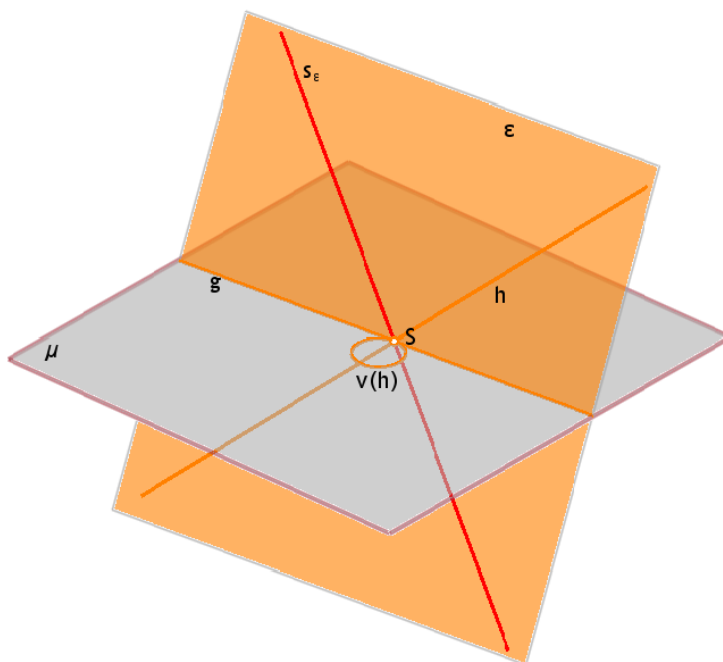


Abbildung 2.5: Bem. 2.2.19

Sei nun $P \in g$ mit $P \neq g \cap \mu$, $P \neq g_\infty$, d.h. $P = (r(1, b, c, 0) + s(0, d, e, 1))\mathbb{R}$ für gewisse $r, s \in \mathbb{R}^\times$. Dann ist

$$\nu(P) = (r + si, rb + sd + (rc + se)i)\mathbb{C} = \left(1, \frac{rb + sd + (rc + se)i}{r + si}\right)\mathbb{C}.$$

Mittels einer kleinen Rechnung ergeben sich

$$\nu(P) - (g \cap \mu) = \frac{sd + cs + (se - bs)i}{r + si} \in \mathbb{C}$$

sowie

$$\nu(P) - \nu(g_\infty) = \frac{rb - er + (rc + rd)i}{r + si} \in \mathbb{C}.$$

Die diesen beiden komplexen Zahlen entsprechenden reellen Vektoren stehen senkrecht zueinander genau dann, wenn dies für jene Vektoren der Fall ist, die den mit $(r + si)$ multiplizierten komplexen Zahlen entsprechen. Jene letzteren Vektoren sind

$$s \begin{pmatrix} d + c \\ e - b \end{pmatrix} \text{ und } r \begin{pmatrix} b - e \\ c + d \end{pmatrix}.$$

Sie stehen orthogonal aufeinander, da ihr Skalarprodukt gleich 0 ist. Die Punkte $g \cap \mu, \nu(P), \nu(g_\infty)$ bilden also ein rechtwinkeliges Dreieck mit rechtem Winkel in $\nu(P)$. Nach dem Satz von Thales ist hiermit die Strecke $(g \cap \mu)\nu(g_\infty)$ ein Durchmesser des Kreises $\nu(g)$. \square

Bemerkung 2.2.22 Satz 2.2.21 bedeutet: ist $g \not\parallel \mu$ eine eigentliche Gerade, so gibt es genau einen Netzstrahl $s \neq s_\mu$, zu dem g parallel ist. Der Netzfluchtpunkt von g ist damit $\nu(g_\infty) = \nu(s_\infty) = s \cap \mu$, und $\nu(g)$ ist der Kreis mit dem Durchmesser $(g \cap \mu)(s \cap \mu)$. (Abb. 2.6).

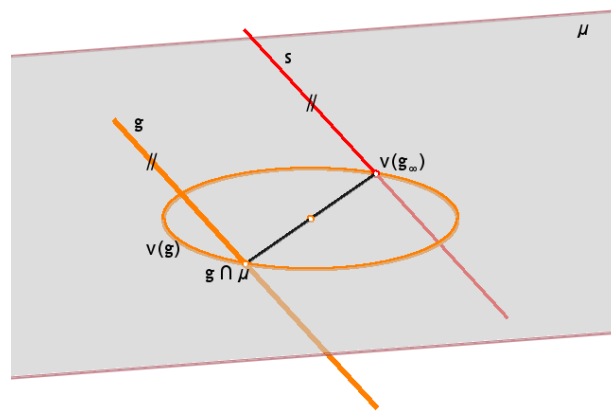


Abbildung 2.6: Satz 2.2.21, Bem. 2.2.22

Satz 2.2.23 Die Netzfluchtspur $\nu(\varepsilon_\infty)$ einer eigentlichen Ebene $\varepsilon \not\parallel \mu$ ist die Gerade durch $\nu(\varepsilon)$ senkrecht auf $\varepsilon \cap \mu$ in μ . (Abb. 2.7).

Beweis. Nach Bemerkung 2.2.19 sind die Netzbilder aller Geraden h in ε durch $\nu(\varepsilon)$ Kreise durch $\nu(\varepsilon)$, die $\varepsilon \cap \mu$ in $\nu(\varepsilon)$ berühren, oder $\varepsilon \cap \mu$ selbst. Im Falle eines Kreises hat dieser nach Satz 2.2.21 den Durchmesser $\nu(\varepsilon)\nu(h_\infty)$. Also liegt $\nu(h_\infty)$ auf der Senkrechten in μ zu $\varepsilon \cap \mu$ durch $\nu(\varepsilon)$. Im anderen Fall ist $\nu(h_\infty)$ der uneigentliche Punkt in μ . \square

Satz 2.2.24 Ist g eine eigentliche Gerade in $P^3(\mathbb{R})$ und $g \parallel \mu$, so ist ihr Netzbild $\nu(g)$ eine Gerade, die den Grundriss g' von g in μ im Lotfußpunkt des Koordinatenursprungs O auf g' schneidet. Der orientierte Winkel ζ zwischen $\nu(g)$ und g' ist gegeben durch

$$\zeta = \angle \nu(P)OP',$$

wobei P ein beliebiger eigentlicher Punkt auf g und P' sein Grundriss in μ ist. (Abb. 2.8).

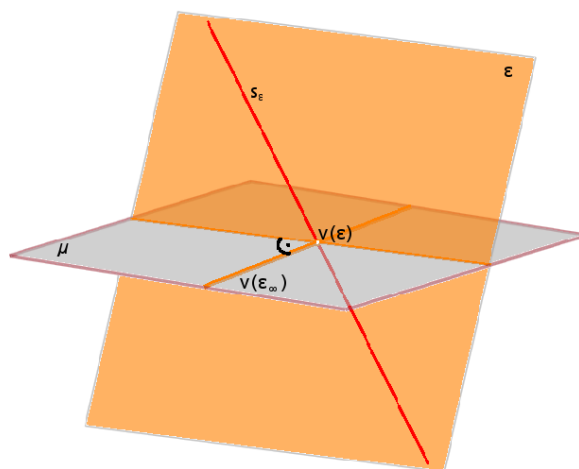


Abbildung 2.7: Satz 2.2.23

Beweis. Wir nehmen an, dass g in positiver z -Achsenrichtung bzgl. μ liegt (der andere Fall wird ganz analog gezeigt) und nicht in μ enthalten ist (wofür die Behauptung trivial ist).

Ist Q ein eigentlicher Punkt in der zu μ parallelen Ebene ε mit $g \subset \varepsilon$, so liegt die Netzprojektion $\nu(Q)$ auf dem Thaleskreis mit dem Durchmesser OQ' , wobei Q' der Grundriss von Q in μ ist. Das Verhältnis der Kathetenlängen $\nu(Q)Q'$ zu $O\nu(Q)$ ist dabei für alle eigentlichen Punkte $Q \in \varepsilon$ ident, da dieses Verhältnis genau deren z -Höhe über der Bildebene μ ist (siehe die Definition der Netzstrahlen $\in \mathcal{E}$ unter (1.1)). Das heißt, dass die Grundrisse aller Punkte von ε durch die Netzprojektion dieselbe Drehung um O um den Winkel $-\zeta$ erfahren. Somit müssen auch die beiden Geraden g' und $\nu(g)$ den Winkel $-\zeta$ einschließen.

Ist $\nu(S)$ der Schnittpunkt von g' und $\nu(g)$ für einen Punkt $S \in g$, so fällt die Kathete $\nu(S)S'$ mit g' zusammen, d.h. g' ist senkrecht zu $O\nu(S)$.

(Für mehr Details siehe [2]). □

Bemerkung 2.2.25 Es sei betont, dass der Winkel zwischen dem Netzbild und dem Grundriss einer zur Bildebene μ parallelen Geraden ausschließlich von deren Abstand zu μ abhängt.

Bemerkung 2.2.26 Gemäß der Sätze 2.2.18 und 2.2.23 sind also die Netzbilder von Geraden Möbiuskreise.

Umgekehrt läßt sich Folgendes sagen: Ist P ein Punkt auf einem Kreis k in μ , weiters $s_P \in \mathcal{E}$ der Netzstrahl durch P und Q der zu P diametral liegende Kreisepunkt, dann ist die Gerade $g \parallel s_P$ durch Q eine Gerade, deren Netzbild der Kreis ist (siehe Bem. 2.2.22). Diese Gerade g ist Leitgerade der vom Kreis k "erzeugten" Regelschar

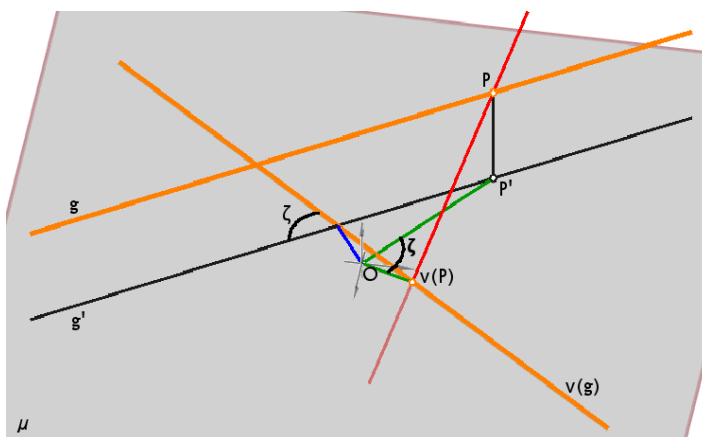


Abbildung 2.8: Satz 2.2.24

$$R_k := \{s_P \in \mathcal{E} \mid P \in k\} \subset \mathcal{E}$$

(siehe Satz 1.3.13(c)).

Auf diese Art erhält man sämtliche Geraden g in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, als Leitgeraden von R_k , deren Netzbild der gegebene Kreis k ist.

Ist l eine eigentliche Gerade in μ , so “erzeugt” diese analog eine Regelschar

$$R_l := \{s_P \in \mathcal{E} \mid s_P \cap l \neq \emptyset\} \subset \mathcal{E}.$$

Wiederum sind genau die Leitgeraden von R_l jene Geraden in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, deren Netzbild die gegebene Gerade l ist. Eine dieser Leitgeraden ist uneigentlich (vgl. Satz 2.2.23), alle anderen sind parallel zur Bildebene μ .

Satz 2.2.27 *Ist g eine eigentliche Gerade in μ , $P \in \mu$ ein eigentlicher Punkt, $P \in s \in \mathcal{E}$, h eine zu s parallele und mit g inzidente Gerade, so ist die Netzprojektion $\nu(g \vee h)$ der Lotfußpunkt von P auf g . (Abb. 2.9).*

Beweis. Nach Satz 2.2.21 ist $\nu(h)$ der Kreis mit dem Durchmesser $(h \cap \mu)\nu(h_\infty) = (h \cap \mu)\nu(s_\infty) = (h \cap \mu)P$, also der Thaleskreis über $(h \cap \mu)P$. Da die Gerade h den in der Ebene $g \vee h$ liegenden Netzstrahl schneidet, ist $\nu(g \vee h) \in g \cap \nu(h)$. Somit stehen $\nu(g \vee h)(h \cap \mu)$ und $\nu(g \vee h)P$ senkrecht zueinander. \square

Als Beispiel für die elliptische Netzprojektion sei die **Kreiskonfiguration von Miquel** erwähnt (Auguste Miquel, 19. Jhd.). Man kann dabei bemerken, dass ein in der Ebene gegebener und nicht leicht durchschaubarer Sachverhalt durch Betrachtung der zugehörigen räumlichen Konfiguration klar einsehbar wird:

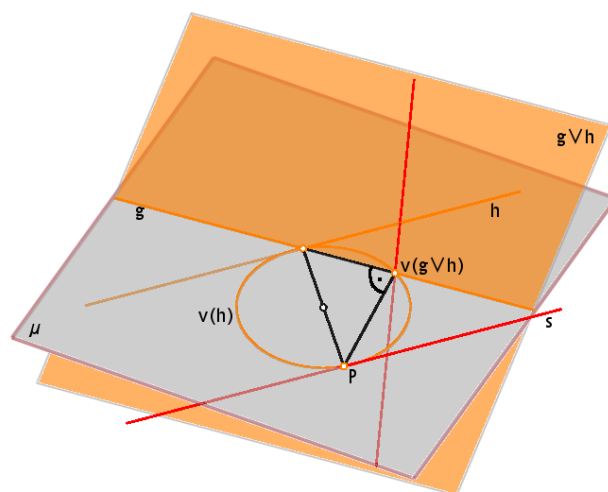


Abbildung 2.9: Satz 2.2.27

Beispiel 2.2.28 In der Bildebene μ sei ein Dreieck mit eigentlichen Eckpunkten A, B, C gegeben. Weiters sei $X \notin \mu$ ein beliebiger Punkt in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Wir betrachten das Tetraeder $ABCX$:

Die Geraden $A \vee X, B \vee X, C \vee X$ gehen mittels Netzprojektion über in die sogenannten **Miquelkreise** k_A, k_B, k_C , die jeweils durch die Eckpunkte A bzw. B bzw. C gehen. Bezeichnen wir die Netzprojektionen $\nu(a \vee X), \nu(b \vee X), \nu(c \vee X)$ der Seitenebenen $a \vee X, b \vee X, c \vee X$ des Tetraeders mit X_a bzw. X_b bzw. X_c , so geht Kreis k_A durch X_b und X_c , Kreis k_B durch X_c und X_a und Kreis k_C durch X_a und X_b . Alle drei Miquelkreise gehen durch den gemeinsamen Punkt $\nu(X)$, den sogenannten **Miquelpunkt**. Bewegt sich der Punkt X auf einer Geraden g , so der Miquelpunkt $\nu(X)$ auf dem Netzbild $\nu(g)$. (Abb. 2.10).

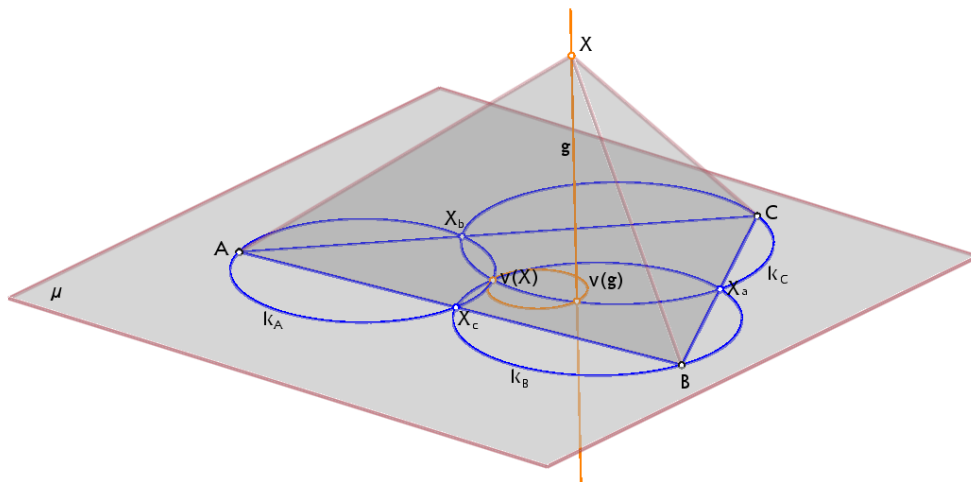


Abbildung 2.10: Miquelsche Kreiskonfiguration

Kapitel 3

Elliptisches Netz und Dreiecksgeometrie

3.1 Bezeichnungen und Hilfssätze

Wie in Kapitel 2 ist \mathcal{E} das elliptische Netz mit den Leitgeraden

$$\begin{aligned}u &= (1, 0, 0, -i)\mathbb{C} \vee (0, 1, -i, 0)\mathbb{C}, \\v &= (1, 0, 0, i)\mathbb{C} \vee (0, 1, i, 0)\mathbb{C}\end{aligned}$$

und μ die Bildebene $x_3 = 0$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

Die Abbildung

$$\nu : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mu$$

ist die zuvor definierte elliptische Netzprojektion.

Unter einem Dreieck ABC in der Ebene μ verstehen wir immer eines mit eigentlichen Eckpunkten.

Definition 3.1.1 Für einen Punkt G auf einer eigentlichen Geraden g in μ nennen wir die mit g und dem Netzstrahl durch G inzidente Ebene **Netzstrahlebene** zu G und g und bezeichnen sie mit $\varepsilon(G, g)$.

Satz 3.1.2 Ist $l \notin \mathcal{E}$ eine Gerade in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, so bildet die Menge aller Treffstrahlen von l aus \mathcal{E} eine Regelschar in \mathcal{E} .

Beweis. Das elliptische Netz \mathcal{E} ist Fixstrahlmenge der zur Matrix (1.11) gehörenden gescharten Kollineation β in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (siehe Satz 1.4.2). Wegen $l \notin \mathcal{E}$ ist l windschief zu $\beta(l)$ (sonst hätte β den Fixpunkt $l \cap \beta(l)$) und mit Satz 1.3.8 bilden somit die l treffenden Fixgeraden eine Regelschar in \mathcal{E} . \square

Satz 3.1.3 *Ist \mathcal{H}_l das Ebenenbündel mit Trägergerade $l \notin \mathcal{E}$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, so ist die Menge aller mit jeweils einer Ebene von \mathcal{H}_l inzidierenden Strahlen aus \mathcal{E} eine Regelschar in \mathcal{E} , nämlich dieselbe wie jene in Satz 3.1.2.*

Beweis. Jede Ebene des Bündels \mathcal{H}_l enthält genau einen Strahl aus \mathcal{E} , der l in einem Punkt P schneidet und zu jedem Punkt P auf l gibt es genau einen Strahl aus \mathcal{E} , der P enthält und somit genau eine Ebene des Bündels \mathcal{H}_l aufspannt (siehe Sätze 1.3.10 und 1.4.2). Also ist die Menge der mit den Ebenen des Bündels \mathcal{H}_l inzidierenden Strahlen aus \mathcal{E} dieselbe wie jene in Satz 3.1.2. \square

Die durch eine Gerade $l \notin \mathcal{E}$ eindeutig bestimmte Regelschar in \mathcal{E} der beiden vorigen Sätze stiftet eine Projektivität zwischen der durch l definierten Punktmenge und dem durch l definierten Ebenenbündel:

Bemerkung 3.1.4 *Ist $l \notin \mathcal{E}$ eine Gerade in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, so ist l als Punktmenge projektiv zum Ebenenbündel \mathcal{H}_l vermöge*

$$\begin{aligned} \pi_l : l &\rightarrow \mathcal{H}_l \\ \mathcal{E} \ni s \ni P &\mapsto \varepsilon \supset s. \end{aligned}$$

Ist speziell $l \subset \mu$, $l \notin \mathcal{E}$, so ist

$$\pi_l(P) = \varepsilon(P, l)$$

die Netzstrahlebene zu P und l und

$$\pi_l^{-1}(\varepsilon) = \nu(\varepsilon)$$

die Netzprojektion der Ebene $\varepsilon \in \mathcal{H}_l$.

Der letzte vorbereitende Satz dieses Abschnitts möge nun einleiten in die folgenden Untersuchungen, in denen beispielhaft demonstriert werden soll, wie man das elliptische Netz \mathcal{E} , die Netzprojektion mittels dieses Netzes auf die Bildebene μ und auch die Normalprojektion auf μ (entlang des zu μ senkrechten Netzstrahles im Koordinatenursprung) dazu benutzen kann, um zahlreiche Tatsachen der ebenen Geometrie mit Konstruktionen im projektiven Raum in eine Beziehung zu bringen. Es wird sich zeigen, dass sich manche Beweise mit diesen räumlichen Hilfsmitteln einfacher oder überschaubarer gestalten, als dies mit Methoden der Ebene allein der Fall ist. Mit solchen Beziehungen zwischen Raum und Ebene, zwischen “oben” und “unten”, möchte der Verfasser dieser Arbeit eine erste kleine, seines Wissens nach neuartige Anregung für weitere Untersuchungen in diese Richtung geben.

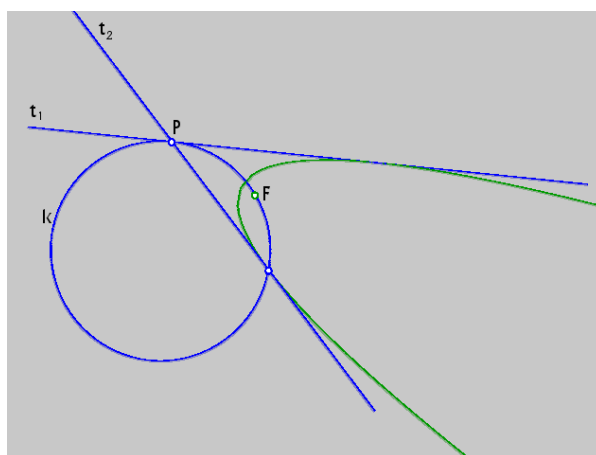


Abbildung 3.1: Satz 3.1.5

Satz 3.1.5 Sind t_1, t_2 verschiedene Tangenten einer Parabel mit Schnittpunkt P und legt man einen Kreis k durch P und den Brennpunkt F so, daß dieser t_1 in P berührt, so ist der zweite Schnittpunkt von k und t_2 der Berührungspunkt von t_2 . (Abb. 3.1).

Beweis. Dem Satz liegt eine Tatsache zugrunde, die z.B. in [9] auf S. 165 erwähnt wird: Jeder Kreis, der einem Tangentendreieck einer Parabel umschrieben ist, geht durch den Brennpunkt F der Parabel. (Abb. 3.2).

Wählt man nun zu den zwei gegebenen Tangenten t_1, t_2 eine beliebige dritte Tangente t_3 , so geht also der Umkreis des zugehörigen Tangentendreiecks durch den Parabelbrennpunkt. Bewegt man die Tangente t_3 kontinuierlich “in Richtung” Tangente t_2 , so wird im Grenzfall $t_3 = t_2$ aus dem Umkreis des Tangentendreiecks ein Kreis, der t_1 in $P = t_1 \cap t_2$ berührt, durch den Berührungspunkt von t_2 und der Parabel und auch durch deren Brennpunkt geht. \square

Im folgenden Abschnitt werden wir zunächst durch naheliegendes Operieren mit Netzstrahlebenen eines Dreiecks auf eine bestimmte Raumgerade und die sogenannten Artzt-Parabeln stoßen. Daran anschließend ergibt sich als Schnittpunkt dieser Raumgeraden mit der Bildebene der Lemoinesche Punkt, über den Ross Honsberger sagt (siehe [4], S. 53):

“...the symmedian point is one of the crown jewels of modern geometry.”

Im daran anschließenden Abschnitt treten die beiden Brocardschen Punkte “auf die Bühne”. Zu diesen sei nochmals Honsberger zitiert (S. 106):

“There is nothing on the surface of things to suggest any connection between the Brocard points and the symmedian point.”

Es kann für uns also umso erstaunlicher sein, in welcher natürlicher Weise mittels des elliptischen Netzes \mathcal{E} ein Zusammenhang gerade dieser Punkte resultiert!

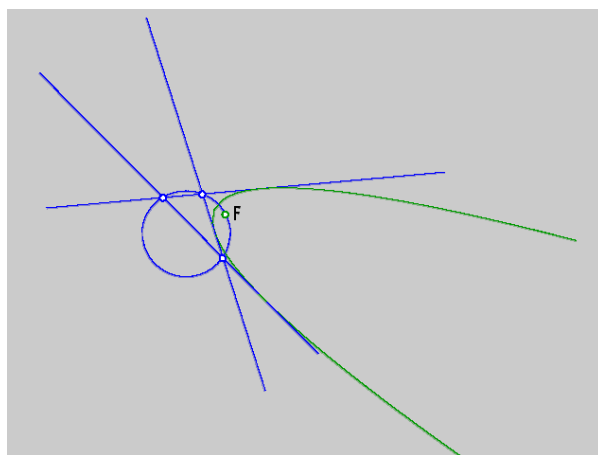


Abbildung 3.2: Beweis des Satzes 3.1.5

3.2 Durch Raumgeraden definierte Parabeln

Satz 3.2.1 Seien b, c zwei verschiedene Geraden in μ mit eigentlichem Schnittpunkt A und g eine zu b, c und dem Netzstrahl durch A windschiefe Gerade in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Dann gilt: Durchläuft X alle Punkte von g , so umhüllen die Geraden

$$X_b \vee X_c$$

eine Parabel in μ , wobei $X_b := \nu(b \vee X)$ und $X_c := \nu(c \vee X)$. (Abb. 3.3).

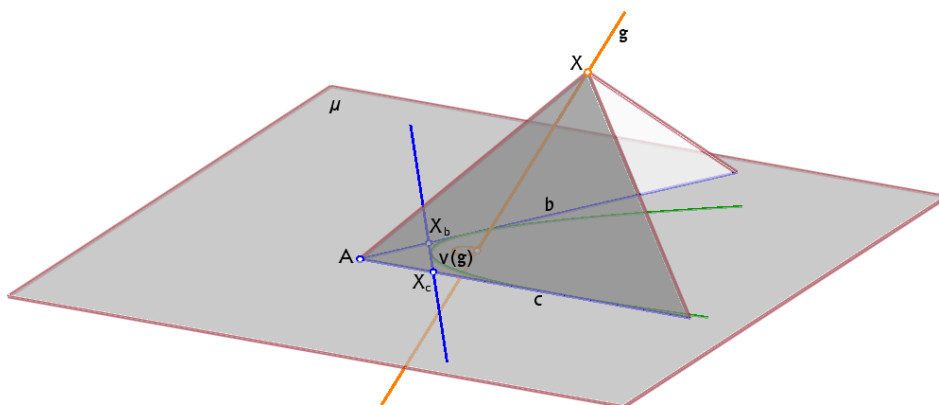


Abbildung 3.3: Satz 3.2.1

Beweis. Wegen $b \cap g = \emptyset$ und $c \cap g = \emptyset$ sind die Ebenenbüschel \mathcal{H}_b und \mathcal{H}_c perspektiv vermöge

$$\sigma : \mathcal{H}_b \rightarrow g \rightarrow \mathcal{H}_c : \varepsilon \mapsto \varepsilon \cap g \mapsto c \vee (\varepsilon \cap g).$$

Somit ist nach Bemerkung 3.1.4 die Abbildung

$$b \rightarrow c : X_b \mapsto \pi_c^{-1} \sigma \pi_b(X_b)$$

eine Projektivität, jedoch keine Perspektivität, da wegen der windschiefen Lage von g und dem mit A inzidenten Netzstrahl $\pi_c^{-1} \sigma \pi_b(A) \neq A$. Die Menge

$$\{X_b \vee \pi_c^{-1} \sigma \pi_b(X_b) \mid X_b \in b\}$$

ist also Menge von Tangenten eines Kegelschnitts in μ . In ihr ist die Ferngerade der Ebene μ enthalten. Also ist der Kegelschnitt eine Parabel. \square

Bemerkung 3.2.2 Die Geraden b und c in Satz 3.2.1 gehören zur Menge der Tangenten der Parabel.

Definition 3.2.3 Wir bezeichnen die in Satz 3.2.1 durch die Geraden g, b und c festgelegte Parabel mit $Par(g, b, c)$. Für die zu einem Punkt $X \in g$ gehörende Tangente von $Par(g, b, c)$ schreiben wir $t_X(b, c)$.

Satz 3.2.4 Seien b, c, A und g wie in Satz 3.2.1. Weiters sei $s \in \mathcal{E}$ mit

$$s \subset A \vee g.$$

Dann geht s durch den Brennpunkt F der Parabel $Par(g, b, c)$, d.h. das Netzbild $\nu(A \vee g)$ der Ebene $A \vee g$ ist der Brennpunkt der Parabel $Par(g, b, c)$. (Abb. 3.4).

Beweis. Sei $X \notin \mu$ ein beliebiger Punkt auf der Geraden g . Nach Satz 3.2.1 ist die zu X gehörende Gerade $X_b \vee X_c$ Tangente von $Par(g, b, c)$. Die Netzprojektion der Geraden $A \vee X$ ist ein Kreis durch die Punkte A, X_b, X_c , also Umkreis des Tangentendreiecks $b, c, X_b \vee X_c$. Nach einem bekannten Satz (siehe z.B. [9], S. 165) geht der Umkreis eines jeden Tangentendreiecks einer Parabel durch deren Brennpunkt. Die Gerade $A \vee X$ liegt in der Ebene $A \vee g$, hat also mit dem Strahl $s \subset A \vee g$ einen gemeinsamen Punkt. Dessen Netzprojektion liegt somit auf allen Tangentendreieck-Umkreisen, muß also der Brennpunkt sein, da A dafür nicht in Frage kommt. \square

Bemerkung 3.2.5 Nach Satz 3.2.4 liegt also der Brennpunkt der Parabel $Par(g, b, c)$ auf der Netzprojektion der Geraden g .

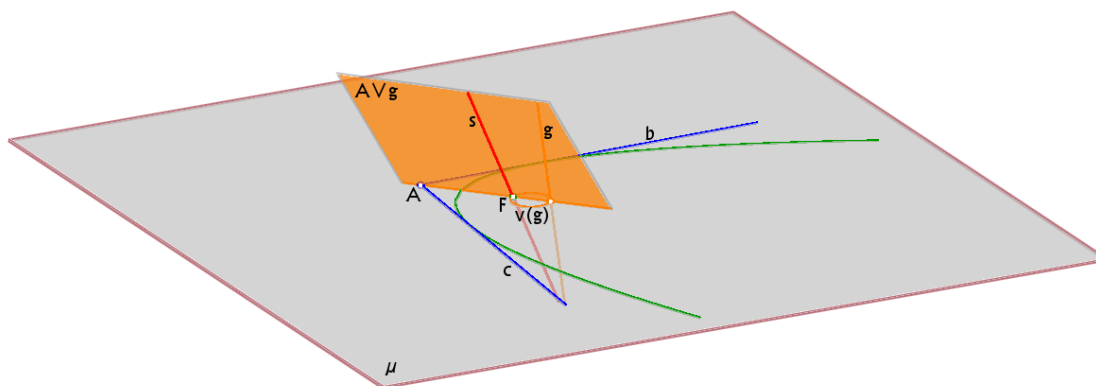


Abbildung 3.4: Satz 3.2.4

Wir können nun den Satz 3.2.4 (Bem. 3.2.5) zu einer Aussage über ein Dreieck in der Bildebene μ und eine Raumgerade heranziehen, indem wir ihn auf die Dreiecksseiten a, b bzw. b, c bzw. c, a anwenden:

Satz 3.2.6 In μ sei ein Dreieck ABC gegeben. Weiters sei g in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ eine Gerade, die zu den Dreiecksseiten a, b, c und zu den Netzstrahlen durch die Eckpunkte windschief ist. Dann liegen die Brennpunkte der Parabeln $Par(g, a, b)$, $Par(g, b, c)$ und $Par(g, c, a)$ auf der Netzprojektion $\nu(g)$ von g . (Abb. 3.5).

Bemerkung 3.2.7 Auf der Netzprojektion der Raumgeraden g liegt auch der Miquel-punkt der zum Tetraeder $ABCX$ gehörenden Miquelschen Kreiskonfiguration für alle $X \in g, X \notin \mu$. Siehe dazu Beispiel 2.2.28.

Bemerkung 3.2.8 Wir bezeichnen die Brennpunkte der Parabeln $Par(g, a, b)$, $Par(g, b, c)$ und $Par(g, c, a)$ mit F_{ab}, F_{bc} bzw. F_{ca} . Die Geraden $A \vee F_{bc}$, $B \vee F_{ca}$ und $C \vee F_{ab}$ schneiden sich im Spurpunkt $g \cap \mu$ von g . (Abb. 3.5).

Beweis. Es ist $A \vee F_{bc} = A \vee (g \cap \mu)$, da nach Satz 3.2.4 die Ebenen $A \vee g$ und $A \vee s$ ident sind, wobei $s \in \mathcal{E}$ der durch F_{bc} gehende Netzstrahl ist. Ebenso ist $B \vee F_{ca} = B \vee (g \cap \mu)$ und $C \vee F_{ab} = C \vee (g \cap \mu)$, woraus die Behauptung folgt. \square

Eine spezielle Tangente einer Parabel ist jene in ihrem Scheitelpunkt. Der nächste Satz gibt Auskunft darüber, durch welchen Punkt X auf der Raumgeraden g die Scheiteltangente gemäß Satz 3.2.1 “erzeugt” wird:

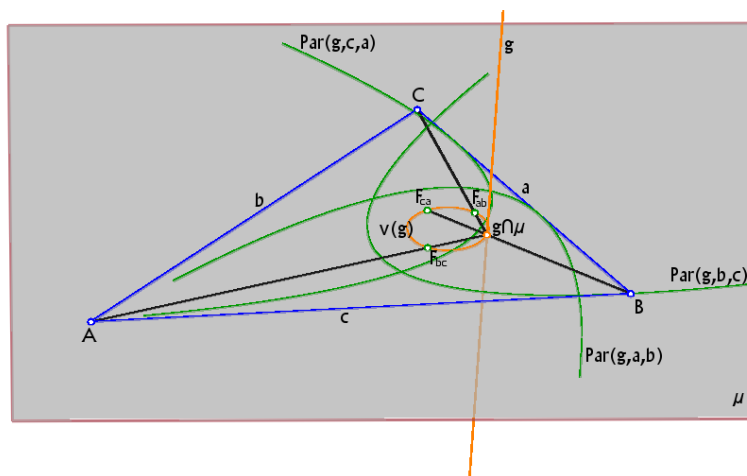


Abbildung 3.5: Satz 3.2.6, Bem. 3.2.8

Satz 3.2.9 Seien b, c, A und g wie in Satz 3.2.1.

Die Gerade h sei die zum Netzstrahl $s \subset A \vee g$ (d.h. s geht durch den Brennpunkt der Parabel $\text{Par}(g, b, c)$ nach Satz 3.2.4) parallele Gerade durch A . Dann ist für

$$X := h \cap g$$

die (gemäß Satz 3.2.1) zugehörige Tangente $t_X(b, c)$ die Scheiteltangente der Parabel $\text{Par}(g, b, c)$. (Abb. 3.6).

Beweis. Der Lotfußpunkt des Brennpunktes einer Parabel bzgl. einer beliebigen eigentlichen Tangente liegt auf der Scheiteltangente der Parabel (siehe z.B. [9], S. 163). Ist s der Netzstrahl durch den Brennpunkt, so sind nach Satz 2.2.27 die Lotfußpunkte des Brennpunktes bzgl. Parabeltangente b und c gegeben durch die Netzprojektion der Ebenen $b \vee h_1$ bzw. $c \vee h_2$, wobei h_1, h_2 zu s parallele Geraden durch b bzw. c sind. Die Schnittgerade h der Ebenen $b \vee h_1$ und $c \vee h_2$ ist parallel zu s und liegt in der Ebene $A \vee g$, da $s \subset A \vee g$ nach Satz 3.2.4. Somit existiert der Punkt $X := h \cap g$, und die zu ihm gehörende Tangente ist wegen $X_b = \nu(b \vee X) = \nu(b \vee h_1)$ und $X_c = \nu(c \vee X) = \nu(c \vee h_2)$ die Scheiteltangente der Parabel (siehe Satz 3.2.4). \square

Zu einem Punkt X auf der Raumgeraden g mit zugehöriger Tangente $t_X(b, c)$ erhält man deren Berührungspunkt als Netzbild einer gewissen Ebene, wie im folgenden Satz gezeigt wird:

Satz 3.2.10 Seien b, c, A und g wie in Satz 3.2.1.

Sei s der Netzstrahl durch den Brennpunkt F_{bc} der Parabel $\text{Par}(g, b, c)$ und $X \in g$, $X \notin \mu$, mit zugehöriger Tangente $t_X(b, c)$. Dann existiert (nach Satz 3.2.4) der Punkt

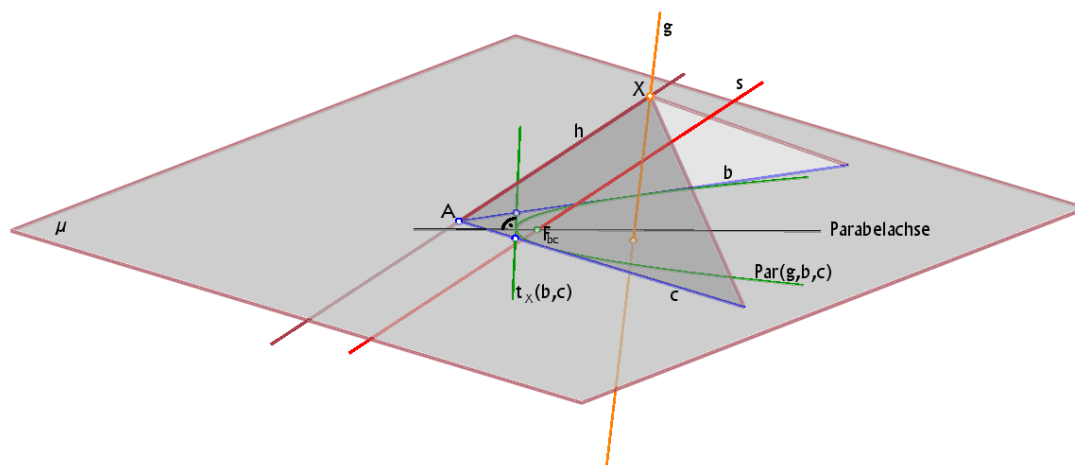


Abbildung 3.6: Satz 3.2.9

$$Y := (A \vee X) \cap s$$

und der Berührungspunkt der Tangente $t_X(b, c)$ ist die Netzprojektion

$$\nu(t_X(b, c) \vee Y)$$

der Ebene $t_X(b, c) \vee Y$. (Abb. 3.7).

Beweis. Sei X_b die Netzprojektion der Ebene $b \vee X$, also $X_b = t_X(b, c) \cap b$ (Satz 3.2.1). Die Netzprojektion der Geraden $X_b \vee Y$ ist ein Kreis k durch X_b und Brennpunkt F_{bc} der Parabel. Da A, Y, X kollinear sind, sind die Ebenen $b \vee Y$ und $b \vee X$ ident. Deshalb ist der zweite Schnittpunkt von k und b , d.h. die Netzprojektion von $b \vee Y$, gleich X_b (siehe Bem. 2.2.19). Der Kreis k berührt also die Parabeltangente b im Punkt X_b . Nach Satz 3.1.5 ist der zweite Schnittpunkt von k und $t_X(b, c)$ der Berührungspunkt von $t_X(b, c)$. Dieser zweite Schnittpunkt ist aber die Netzprojektion der Ebene $t_X(b, c) \vee Y$ (nach Bem. 2.2.19). \square

Aus Satz 3.2.10 folgt im speziellen die räumliche Konstruktion des Parabelscheitels via Scheiteltangente:

Bemerkung 3.2.11 Bestimmt $X \in g$ die Scheiteltangente t_X der Parabel $Par(g, b, c)$ gemäß Satz 3.2.9, so ist deren Scheitel gegeben durch die Netzprojektion

$$\nu(t_X \vee s_\infty)$$

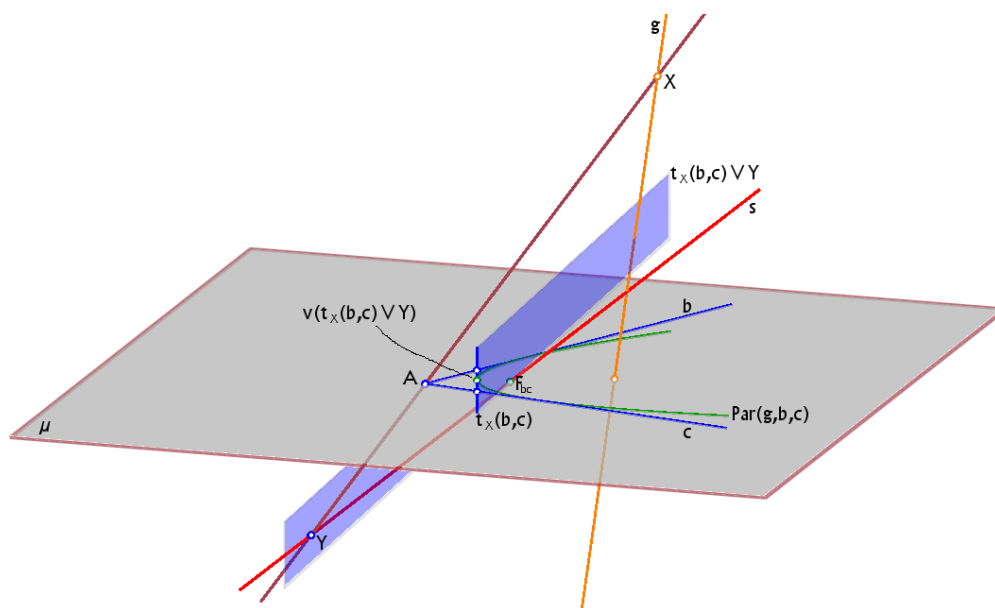


Abbildung 3.7: Satz 3.2.10

der Ebene $t_X \vee s_\infty$, wobei s_∞ der unendlich ferne Punkt des Netzstrahls s durch den Brennpunkt der Parabel ist. (Abb. 3.8).

Wie wir bisher gesehen haben, kann man zu einem Dreieck ABC in der Bildebene μ mittels einer Geraden g in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ unter Zuhilfenahme des elliptischen Netzes \mathcal{E} eine Parabel generieren, die z.B. die beiden Dreieckseiten b, c als Tangenten besitzt (Bem. 3.2.2). Eine weitere Frage besteht nun darin, wie die Gerade g liegen muss, damit die Berührungspunkte der Tangenten b und c die Eckpunkte C bzw. B sind. Dazu zunächst die

Definition 3.2.12 Ein Paar (L, l) bestehend aus einem Punkt L und einer Geraden $l \subset \mu$ mit $L \in l$ heißt *Linienelement* einer Kurve in μ , wenn l eine Tangente der Kurve und L der zugehörige Berührungspunkt ist.

Satz 3.2.13 Sei ABC ein Dreieck in μ . Die Gerade g sei windschief zu den Dreieckseiten b, c und zum Netzstrahl durch A . Die durch g, b, c bestimmte Parabel sei $Par(g, b, c)$ (Def. 3.2.3). Weiter seien die Geraden g_A und h_A durch A definiert als Schnitt jeweils zweier Netzstrahlebenen (Def. 3.1.1):

$$g_A := \varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(C, b),$$

$$h_A := \varepsilon(A, b) \cap \varepsilon(B, c).$$

Dann gilt (Abb. 3.9):

$$Par(g, b, c) \text{ hat } (C, b) \text{ und } (B, c) \text{ als Linienelemente} \Leftrightarrow g \subset g_A \vee h_A.$$

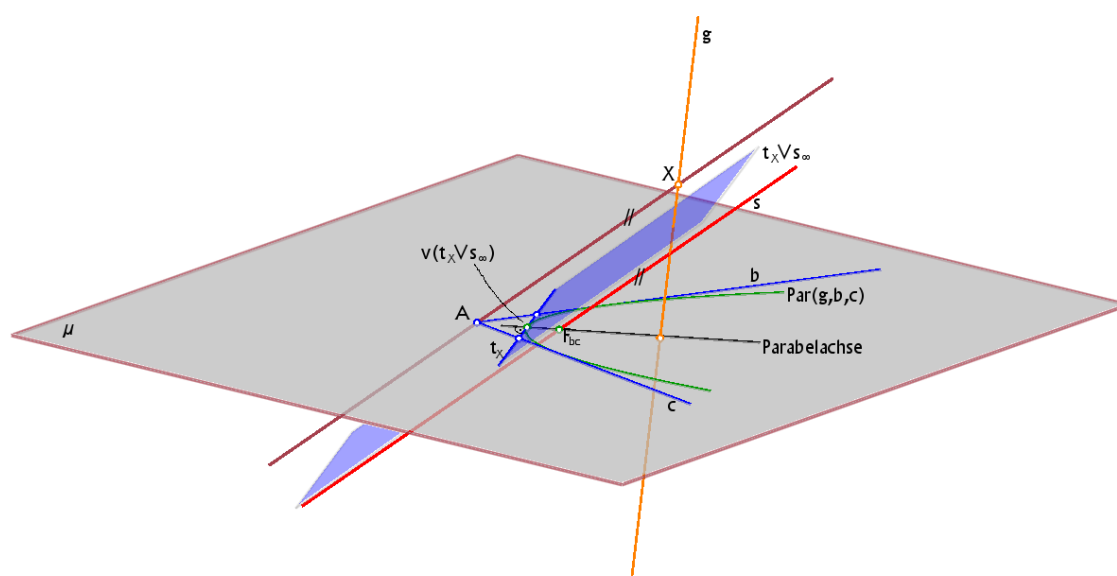


Abbildung 3.8: Bem. 3.2.11

Beweis. Wir bezeichnen den Netzstrahl durch den Brennpunkt der Parabel mit s_F .

“ \Rightarrow ”:

Da (C, b) Linienelement der Parabel ist, gibt es einen Punkt $X \in g$, sodass $X_b \vee X_c = b$ ist, wobei $X_b = \nu(b \vee X)$ und $X_c = \nu(c \vee X)$ (siehe Satz 3.2.1). Das heißt aber, dass $X_c = A$, also X in der Netzstrahlebene $\varepsilon(A, c)$ liegt.

Da C der Berührungspunkt der Tangente b ist, muss mit $Y := (A \vee X) \cap s_F$ die Ebene $b \vee Y$ gleich der Netzstrahlebene $\varepsilon(C, b)$ sein (siehe Satz 3.2.10). Wegen $b \vee Y = b \vee X$ folgt daraus, dass X auch in der Netzstrahlebene $\varepsilon(C, b)$ liegt. Also ist X Element der Geraden $\varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(C, b) = g_A$.

Analog folgt aus der Annahme, dass (B, c) Linienelement der Parabel ist, dass es einen Punkt $X' \in g$, $X' \neq X$ gibt, der Element der Geraden $\varepsilon(A, b) \cap \varepsilon(B, c) = h_A$ ist. Folglich ist $X \vee X' = g$ enthalten in der Ebene $g_A \vee h_A$.

“ \Leftarrow ”:

Sei $g \subset g_A \vee h_A$. Nach Satz 3.2.4 ist s_F enthalten in der Ebene $A \vee g$, also $s_F \subset g_A \vee h_A$. Somit $s_F \cap g_A \neq \emptyset$ und die Netzprojektion $\nu(g_A)$ ist ein Kreis durch den Brennpunkt der Parabel. Wegen $g_A \subset \varepsilon(A, c)$ ist A zweifacher Schnittpunkt dieses Kreises mit der Seite c (Bem. 2.2.19), d.h. $\nu(g_A)$ berührt c in A . Folglich ist nach Satz 3.1.5 der zweite Schnittpunkt von $\nu(g_A)$ mit der Seite b (außer A) der Berührungspunkt von b mit der Parabel $Par(g, b, c)$. Dieser Punkt ist aber wegen $g_A \subset \varepsilon(C, b)$ der Punkt C , also ist (C, b) ein Linienelement der Parabel.

Analog folgt aus $s_F \cap h_A \neq \emptyset$, dass (B, c) ein Linienelement der Parabel ist. \square

Bemerkung 3.2.14 Sind die Voraussetzungen des Satzes 3.2.13 erfüllt und ist

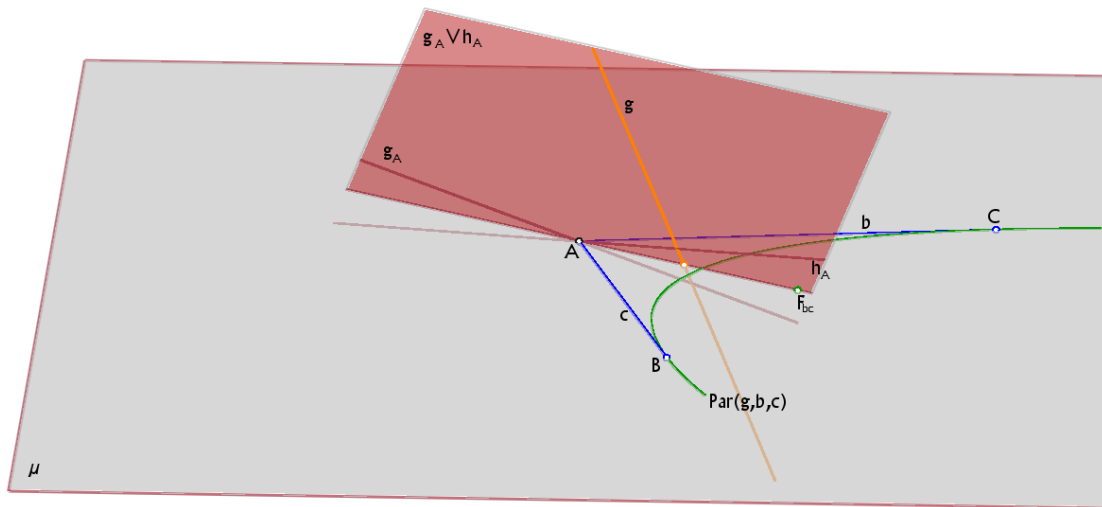


Abbildung 3.9: Satz 3.2.13, Satz 3.2.16

$$g \subset g_A \vee h_A,$$

so hat man folgende “Entsprechungen” zwischen Punkten auf g und Linienelementen der Parabel (wie aus dem Beweis hervorgeht):

$$\begin{aligned} g_A \cap g &\Leftrightarrow (C, b), \\ h_A \cap g &\Leftrightarrow (B, c). \end{aligned}$$

Es stellt sich nun im Folgenden erwartungsgemäß heraus, dass nach Vorgabe eines Dreiecks ABC in der Bildebene μ die eindeutig bestimmte Parabel mit den beiden Linienelementen (C, b) und (B, c) genau durch all jene Geraden g in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ gemäß Satz 3.2.1 “erzeugt” wird, die in der Ebene $g_A \vee h_A$ liegen und nicht durch den Punkt A gehen. Dazu zunächst folgendes

Lemma 3.2.15 *Sei ABC ein Dreieck in der Bildebene μ und die Geraden g_A, h_A definiert wie in Satz 3.2.13. Dann gilt:*

- 1) $(g_A \vee h_A) \cap \mu \neq b$ und $(g_A \vee h_A) \cap \mu \neq c$,
- 2) $s \in \mathcal{E}$ mit $A \in s$ ist nicht enthalten in $g_A \vee h_A$.

Beweis. 1) Die Netzprojektion von g_A ist ein Kreis k_g , der c in A berührt, denn die beiden Schnittpunkte von k_g und c sind $g_A \cap \mu$ und die Netzprojektion der Ebene $\varepsilon(A, c)$, in der g_A enthalten ist, also identisch.

Analog ist die Netzprojektion von h_A ein Kreis k_h , der b in A berührt. Der Schnittpunkt

$\neq A$ der Kreise k_g und k_h kann also weder auf b noch auf c liegen. Dieser ist aber die Netzprojektion der Ebene $g_A \vee h_A$. Also kann die Spur dieser Ebene in μ weder b noch c sein.

2) Wäre $s \in \mathcal{E}$ mit $A \in s$ enthalten in $g_A \vee h_A$, so wäre die Netzprojektion von $g_A \vee h_A$ der Punkt A , d.h. die Kreise k_g und k_h müßten sich in A berühren, was nicht möglich ist. \square

Aus Satz 3.2.13 und Lemma 3.2.15 folgt nun

Satz 3.2.16 *Sei ABC ein Dreieck in der Bildebene μ . Die beiden Geraden g_A und h_A seien wie zuvor:*

$$\begin{aligned} g_A &= \varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(C, b), \\ h_A &= \varepsilon(A, b) \cap \varepsilon(B, c). \end{aligned}$$

Dann ist jede Gerade $g \subset g_A \vee h_A$ mit $A \notin g$ windschief zu den Dreieckseiten b und c und zum Netzstrahl durch A und generiert somit (gemäß den Sätzen 3.2.1 und 3.2.10) die eindeutig bestimmte Parabel mit den Linienelementen (C, b) und (B, c) . (Abb. 3.9).

Die freie Wählbarkeit der Geraden g innerhalb der Ebene $g_A \vee h_A$ (Satz 3.2.16) zur Erzeugung (gemäß Satz 3.2.1) der durch die Linienelemente (C, b) und (B, c) definierten Parabel läßt die Vermutung entstehen, dass es eine Gerade geben müßte, durch die nicht nur diese Parabel, sondern auch die beiden anderen durch die Linienelemente (A, c) , (C, a) bzw. (B, a) , (A, b) definierten Parabeln erzeugbar wären. Dies ist der Fall, wie der nächste Satz zeigt:

Satz 3.2.17 *In der Bildebene μ sei ein Dreieck ABC gegeben. Die folgenden Geraden durch die Eckpunkte A bzw. B bzw. C seien:*

$$\begin{aligned} g_A &:= \varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(C, b), \\ h_A &:= \varepsilon(A, b) \cap \varepsilon(B, c), \\ g_B &:= \varepsilon(B, a) \cap \varepsilon(A, c), \\ h_B &:= \varepsilon(B, c) \cap \varepsilon(C, a), \\ g_C &:= \varepsilon(C, b) \cap \varepsilon(B, a), \\ h_C &:= \varepsilon(C, a) \cap \varepsilon(A, b). \end{aligned}$$

Dann haben die Ebenen $g_A \vee h_A$, $g_B \vee h_B$ und $g_C \vee h_C$ eine Gerade o gemeinsam, also

$$o := (g_A \vee h_A) \cap (g_B \vee h_B) \cap (g_C \vee h_C).$$

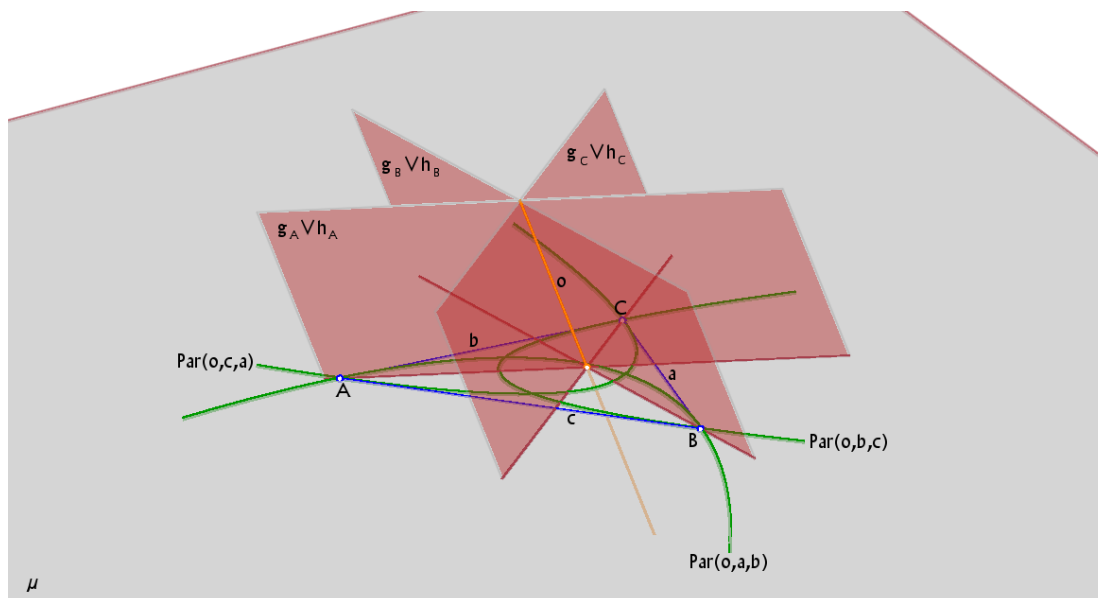


Abbildung 3.10: Satz 3.2.17

Diese Gerade ist windschief zu den Dreieckseiten und zu den Netzstrahlen durch A , B und C . Durch sie werden die Parabeln $Par(o, b, c)$, $Par(o, c, a)$ und $Par(o, a, b)$ mit den Linienelementen (C, b) , (B, c) bzw. (A, c) , (C, a) bzw. (B, a) , (A, b) gemäß Satz 3.2.1 erzeugt. (Abb. 3.10).

Beweis. Wir setzen $o := (g_A \vee h_A) \cap (g_B \vee h_B)$. Mit Teil 1 von Lemma 3.2.15 folgt, daß o windschief zu den Seiten a, b, c ist. Mit Teil 2 des Lemmas folgt, daß o windschief zu den Netzstrahlen durch A und B ist. Da g_A und g_B in $\varepsilon(A, c)$ enthalten sind, o jedoch nicht (o ist windschief zu c), und o weder mit g_A noch mit g_B leeren Durchschnitt hat, muß $o \cap (g_A \cap g_B) \neq \emptyset$ sein. Daraus folgt $o \cap (\varepsilon(C, b) \cap \varepsilon(B, a)) = o \cap g_C \neq \emptyset$.

Analog sieht man, daß $o \cap (h_A \cap h_B) \neq \emptyset$, folglich $o \cap (\varepsilon(A, b) \cap \varepsilon(C, a)) = o \cap h_C \neq \emptyset$. Wegen $C \notin o$ ist somit $o \subset g_C \vee h_C$.

Mit Teil 2 von Lemma 3.2.15 gilt schließlich, daß o auch windschief zum Netzstrahl durch C ist. \square

Bemerkung 3.2.18 Die zu einem Dreieck ABC gehörende Parabel mit den Linienelementen (C, b) und (B, c) trägt die Bezeichnung **Artzt-Parabel (erster Art)** bzgl. A (siehe z.B. [13]).

Die in Satz 3.2.17 durch die Gerade o erzeugten drei Parabeln sind also die Artzt-Parabeln bzgl. A bzw. B bzw. C .

Mittels des elliptischen Netzes \mathcal{E} und mit Hilfe der Geraden o eines Dreiecks kann eine

interessante Eigenschaft der Artzt-Parabeln (Satz 3.2.25) hergeleitet werden. Dazu die folgenden Definitionen (siehe [13]) und der anschließende Satz:

Definitionen 3.2.19 Der **Lemoinesche Punkt** L eines Dreiecks ABC ist der Schnittpunkt seiner drei Symmedianen, wobei eine **Symmediane** die an der Winkelhalbierenden gespiegelte Schwerelinie (gespiegelte Mediane) ist.

(Émile Lemoine, 1840-1912, entdeckte diesen Punkt im Jahre 1874.)

Der **Brocard-Kreis** von ABC ist der Kreis mit dem Durchmesser UL , wobei U der Umkreismittelpunkt und L der Lemoinesche Punkt von ABC ist.

(Henri Brocard, 1845-1922)

Ist L der Lemoinesche Punkt eines Dreiecks ABC , so nennt man das aus den Schnittpunkten $\neq L$ der Geraden $A \vee L$, $B \vee L$, $C \vee L$ mit dem Brocard-Kreis gebildete Dreieck das **zweite Brocard-Dreieck** von ABC .

(Begriff des *ersten Brocard-Dreiecks* in Def. 3.3.8.)

Den Zusammenhang der Geraden o mit dem Lemoineschen Punkt L eines Dreiecks beschreibt

Satz 3.2.20 Sei ABC ein Dreieck in μ und die Gerade o definiert wie in Satz 3.2.17. Dann liegen die beiden Punkte

$$\begin{aligned} O_1 &:= \varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(B, a) \cap \varepsilon(C, b), \\ O_2 &:= \varepsilon(B, c) \cap \varepsilon(C, a) \cap \varepsilon(A, b) \end{aligned}$$

auf o . Der Punkt

$$L := o \cap \mu$$

ist der Lemoinesche Punkt von ABC und halbiert die Strecke O_1O_2 .

Die Netzprojektion des unendlich fernen Punktes der Geraden o ist der Umkreismittelpunkt U des Dreiecks ABC :

$$U = \nu(o_\infty).$$

(Abb. 3.11).

Für den Beweis benötigen wir zwei kleine Hilfssätze.

Zuerst der sogenannte ‘‘Südpolsatz’’ (siehe [5]):

Hilfsatz 3.2.21 In einem Dreieck schneiden sich eine Winkelsymmetrale und die Seitensymmetrale der dem Winkel gegenüberliegenden Seite auf dem Umkreis des Dreiecks. (Abb. 3.12).

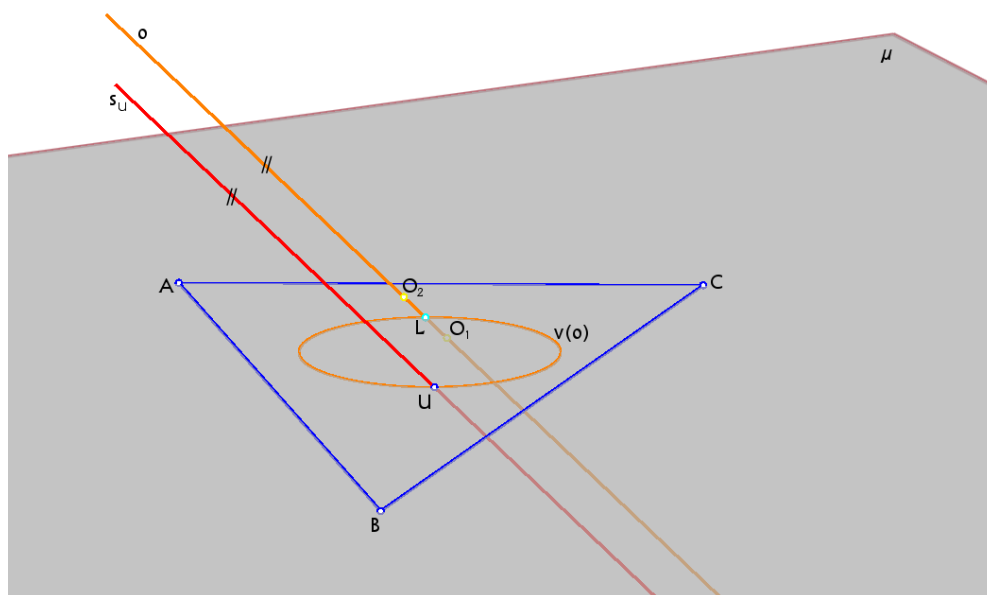


Abbildung 3.11: Satz 3.2.20

Hilfsatz 3.2.22 *Spiegelt man die Tangente an den Umkreis in B eines Dreiecks ABC an der Winkelsymmetrale durch A und die gespiegelte Gerade nochmals an einer Normalen auf Seite b , so ist die resultierende Gerade parallel zur Seite a . (Abb. 3.13).*

Dieser Hilfssatz beruht auf dem ‘‘Sehnentangentenwinkelsatz’’ (siehe [5]), der besagt, dass der Winkel zwischen der Kreissehne AB und der Tangente in B (oder in A) gleich dem Peripheriewinkel γ über dem Kreisbogen der Sehne AB ist.

Bemerkung 3.2.23 An dieser Stelle sei ein **Beweisprinzip** erwähnt, das wir immer wieder benutzen werden:

Im Zusammenhang mit dem elliptischen Netz \mathcal{E} ist ein wichtiger Punkt eines Dreiecks ABC dessen Umkreismittelpunkt U . Wendet man nämlich auf das Dreieck eine Möbiustranslation mit einer Matrix der Gestalt

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(mit einem gewissen $\beta \in \mathbb{C}^\times$) an, die den Umkreismittelpunkt U des Dreiecks in den Koordinatenursprung verschiebt, so haben die Netzstrahlen in den Eckpunkten des Dreiecks alle dieselbe Steigung bzgl. der Bildebene μ . Ein Netzstrahl kann durch Rotation um den senkrechten Netzstrahl s_U in jeden anderen der drei übergeführt werden.

Die zu A gehörende Kollineation mit Abbildungsmatrix \hat{A} (siehe 1.16) läßt das elliptische Netz \mathcal{E} invariant, hat die Bildebene μ und die Fernebene ω (siehe 2.1) als Fixebenen und

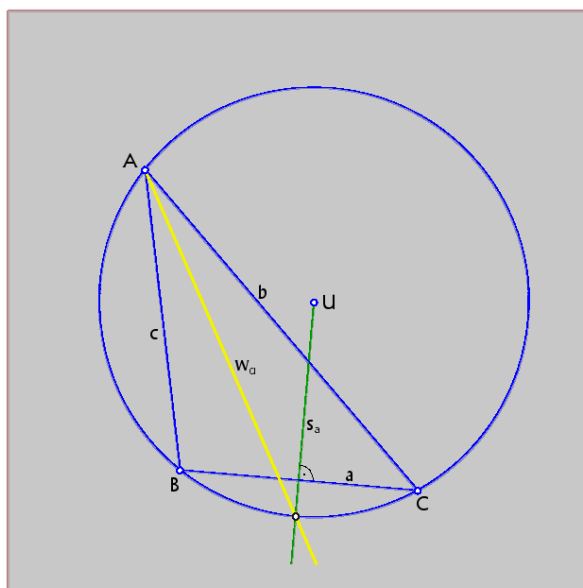


Abbildung 3.12: Südpolsatz

läßt den Normalabstand eines eigentlichen Punktes von μ unverändert, wie man sich leicht klar macht.

Allgemein gilt: sofern die einzelnen Behauptungen eines *Satzes* invariant sind bzgl. einer solchen Verschiebung, darf diese o.B.d.A. für den *Beweis* dieser Behauptungen in Anspruch genommen werden.

Nun zum Beweis des Satzes 3.2.20:

Beweis. Nach den Definitionen in Satz 3.2.17 ist

$$\begin{aligned} O_1 &= g_A \cap g_B \cap g_C, \\ O_2 &= h_A \cap h_B \cap h_C. \end{aligned}$$

Damit ist klar, dass O_1 und O_2 auf o liegen.

Für das Weitere wenden wir auf das Dreieck eine Möbiustranslation an, die den Umkreismittelpunkt U des Dreiecks in den Koordinatenursprung verschiebt (siehe Bem. 3.2.23).

Die O_1 und O_2 definierenden Netzstrahlebenen haben nun eine bzgl. μ symmetrische (spiegelbildliche) Stellung zueinander:

$$\begin{aligned} \varepsilon(A, c) &\text{ symmetrisch zu } \varepsilon(B, c), \\ \varepsilon(B, a) &\text{ symmetrisch zu } \varepsilon(C, a), \\ \varepsilon(C, b) &\text{ symmetrisch zu } \varepsilon(A, b). \end{aligned}$$

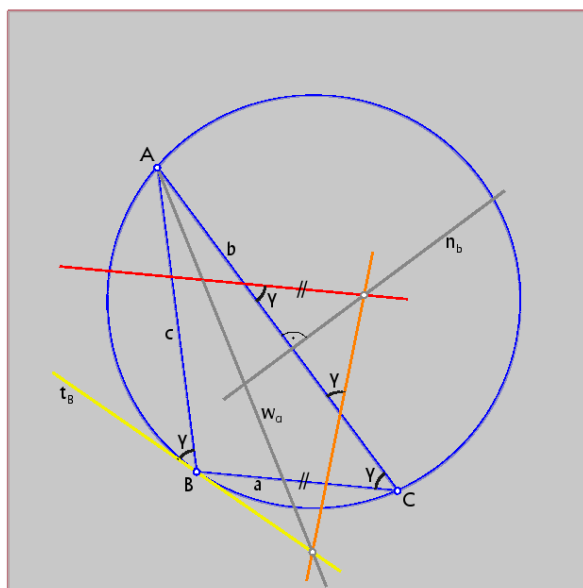


Abbildung 3.13: Hilfsatz 3.2.22

Daraus folgt, dass die Punkte O_1 und O_2 bzgl. μ symmetrisch zueinander liegen und somit $o = O_1 \vee O_2$ senkrecht auf μ steht, also parallel zum Netzstrahl in U ist. Mit Bem. 2.2.22 bedeutet dies, dass U und $o \cap \mu$ diametral auf dem Kreis $\nu(o)$ liegen und $U = \nu(o_\infty)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $o \cap \mu$ der Lemoinesche Punkt des Dreiecks ist (siehe Abb. 3.14): Die zu μ senkrechte Gerade o ist per Definition enthalten in der ebenfalls senkrecht auf μ stehenden Ebene $g_A \vee h_A$ durch den Eckpunkt A . Es ist also zu zeigen, dass die Gerade $(g_A \vee h_A) \cap \mu$, oder anders gesagt, der Grundriss (Projektion parallel s_U) von z.B. h_A in μ , eine Symmediane des Dreiecks ist. Das ist genau dann der Fall, wenn der Grundriss des an der durch die Winkelhalbierende w_α verlaufenden und zu μ senkrechten Ebene ε_α erzeugten Spiegelbildes \tilde{h}_A der Geraden h_A eine Mediane ist.

Es ist $h_A = \varepsilon(A, b) \cap \varepsilon(B, c)$ (siehe Satz 3.2.17). Wir spiegeln also die Ebenen

$$\varepsilon(A, b) = b \vee s_A \text{ und } \varepsilon(B, c) = c \vee s_B$$

an der den Winkel α halbierenden und zur Bildebene μ senkrechten Ebene ε_α .

Zunächst die Spiegelung der Ebene $b \vee s_A$:

Der Grundriss s'_A des Netzstrahles s_A in A ist die Tangente in A . Sei W_α der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden w_α mit dem Umkreis von ABC . Das Spiegelbild von s'_A an w_α ist parallel zur Tangente t_{W_α} in W_α an den Umkreis (w_α als Umkreissehne betrachten). Diese Tangente t_{W_α} ist nach dem "Südpolsatz" (siehe Hilfsatz 3.2.21) parallel zur Dreiecksseite a . Also ist das Spiegelbild \tilde{s}_A von s_A an der Ebene ε_α parallel zum Netzstrahl s_{W_α} in W_α

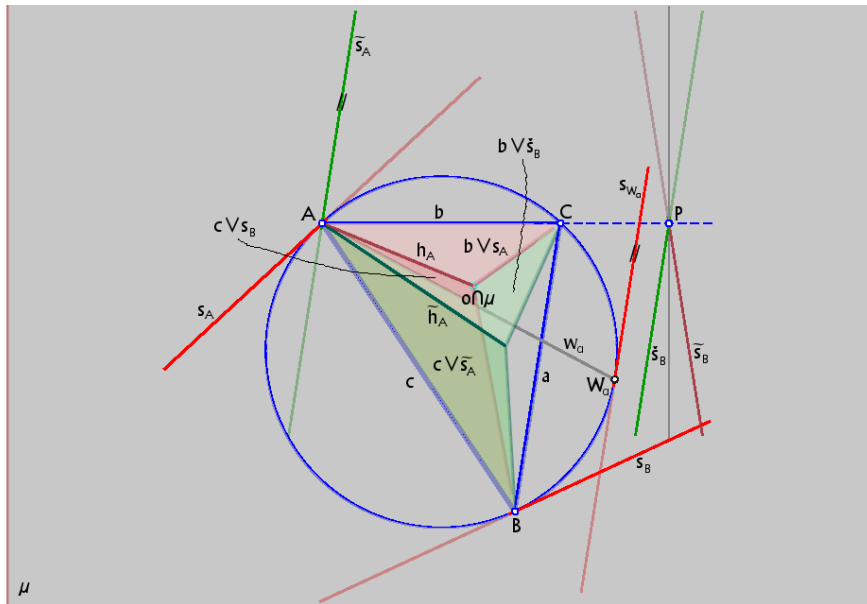


Abbildung 3.14: Beweis des Satzes 3.2.20; Ansicht von oben

und sein Grundriss \tilde{s}_A' parallel zu a . Da die Seite b in die Seite c gespiegelt wird, ergibt sich also:

$$b \vee s_A \rightarrow c \vee \tilde{s}_A$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{s}_A & \parallel s_{W_\alpha}, \\ \tilde{s}_A' & \parallel a. \end{aligned}$$

Nun zur Spiegelung der Ebene $c \vee s_B$:

Sei \check{s}_B der an ε_α gespiegelte Netzstrahl s_B . Die Seite c geht durch diese Spiegelung über in die Seite b . Sei $P := b \cap \check{s}_B$. Die Gerade \check{s}_B werde nun nochmals gespiegelt an der auf die Seite b senkrechten Ebene durch P und der resultierende Strahl bezeichnet mit $\check{\check{s}}_B$. Die gespiegelte Ebene ist zunächst $b \vee \check{s}_B$. Der Übergang zum Strahl $\check{\check{s}}_B$ läßt diese unverändert, also $b \vee \check{s}_B = b \vee \check{\check{s}}_B$. Nach Hilfssatz 3.2.22 ist der Grundriss $\check{\check{s}}_B'$ von $\check{\check{s}}_B$ parallel zu a .

Ausführlicher gesagt: $\check{\check{s}}_B$ ist parallel zum Strahl $\overline{s_{W_\alpha}}$, wobei $\overline{s_{W_\alpha}}$ der an μ gespiegelte Netzstrahl s_{W_α} ist. Es kann nämlich $\check{\check{s}}_B$ nicht parallel zu $s_{W_\alpha} \parallel \tilde{s}_A$ sein, da sonst $h_A = \tilde{s}_A$ und damit $h_A = s_A$, was nicht möglich ist.

Wir haben also die Zuordnung

$$c \vee s_B \rightarrow b \vee \check{\check{s}}_B$$

mit

$$\begin{aligned}\check{s}_B &\parallel \overline{s_{W_\alpha}}, \\ \check{s}_B' &\parallel a.\end{aligned}$$

Da die Steigungen der Geraden $\check{s}_A \parallel s_{W_\alpha}$ und $\check{s}_B \parallel \overline{s_{W_\alpha}}$ bzgl. der Bildebene μ gleich sind und wegen der Parallelität ihrer Grundrisse zur Dreieckseite a schneiden sich also die Ebenen $c \vee \check{s}_A$ und $b \vee \check{s}_B$ in der Geraden \check{h}_A , deren Grundriss \check{h}_A' die Mediane durch A ist. \square

Bzgl. möglicher weiterer Untersuchungen, die sich aus dem Beweis von Satz 3.2.20 ergeben, siehe 3.5.1.

Der Satz 3.2.20 besagt aufgrund von Bemerkung 2.2.22, dass das Netzbild $\nu(o)$ der Geraden o eines Dreiecks dessen Brocard-Kreis ist. Deshalb ergibt sich für die Gerade o die naheliegende

Definition 3.2.24 Die zu einem Dreieck ABC in μ gehörende Gerade $o \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ (Satz 3.2.17) erhält die Bezeichnung **Brocard-Gerade** von ABC .

Weiterhin erhalten wir den

Satz 3.2.25 Die Brennpunkte der Artzt-Parabeln eines Dreiecks sind identisch mit den Eckpunkten seines zweiten Brocard-Dreiecks. (Abb. 3.15).

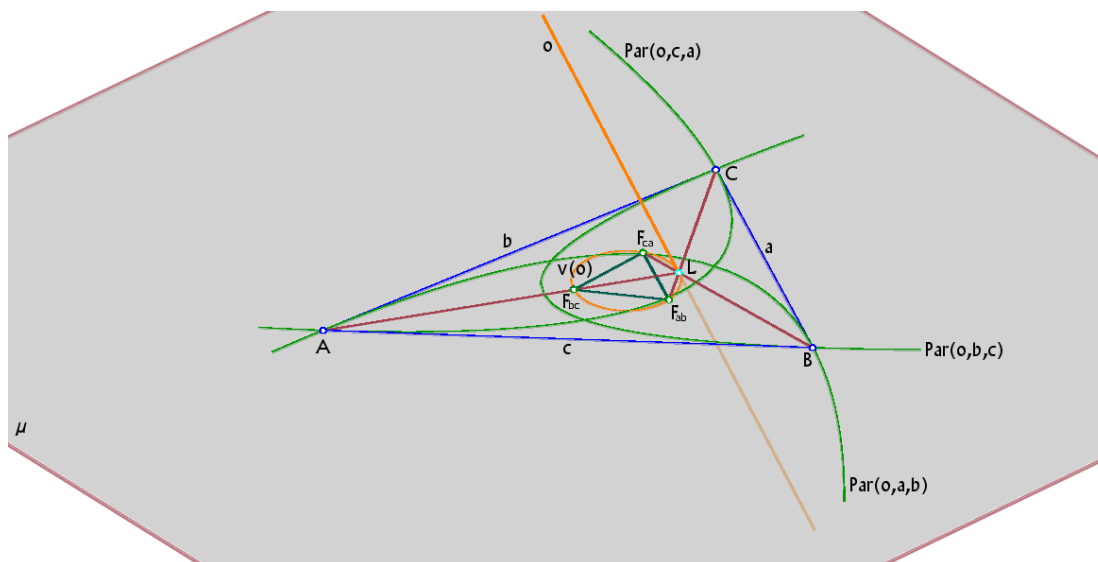


Abbildung 3.15: Satz 3.2.25

Beweis. Sei ABC das gegebene Dreieck in der Bildebene μ . Nach Satz 3.2.4 ist die Netzprojektion $\nu(A \vee o)$ der Ebene $A \vee o$, wobei o die Brocard-Gerade des Dreiecks ist, gleich dem Brennpunkt F_{bc} der Artzt-Parabel $Par(o, b, c)$ mit den Linienelementen (C, b) und (B, c) . Der Brennpunkt F_{bc} liegt also einerseits auf dem Brocard-Kreis $\nu(o)$, da der Netzstrahl $s \in \mathcal{E}$ mit $s \subset A \vee o$ die Gerade o schneidet. Andererseits ist F_{bc} Element von $(A \vee o) \cap \mu = A \vee (o \cap \mu) = A \vee L$, wobei $L = o \cap \mu$ der Lemoinesche Punkt des Dreiecks ist (Satz 3.2.20). Das heißt, F_{bc} ist ein Eckpunkt des zweiten Brocard-Dreiecks. Analog für die anderen beiden Artzt-Parabeln. \square

Im nächsten Abschnitt befassen wir uns etwas näher mit einigen Beziehungen der Brocard-Geraden eines Dreiecks mit zugehörigen Phänomenen in der Ebene, insofern diese durch das elliptische Netz \mathcal{E} vermittelt werden.

3.3 Die Brocard-Gerade eines Dreiecks

Mit o bezeichnen wir durchwegs die mit Satz 3.2.17 eingeführte und in 3.2.24 definierte Brocard-Gerade eines Dreiecks ABC in der Bildebene μ . Im Folgenden benötigen wir den Begriff der Brocardschen Punkte und des Brocardschen Winkels (siehe [4]):

Satz 3.3.1 *Sei ABC ein Dreieck in der Bildebene μ und die Kreise k_A, k_B, k_C wie folgt definiert:*

$$\begin{aligned} k_A &\text{ geht durch } C \text{ und berührt die Seite } c \text{ in } A, \\ k_B &\text{ geht durch } A \text{ und berührt die Seite } a \text{ in } B, \\ k_C &\text{ geht durch } B \text{ und berührt die Seite } b \text{ in } C. \end{aligned}$$

Diese drei Kreise schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt. (Abb. 3.16).

Beweis. Es liegt eine spezielle Miquelsche Kreiskonfiguration vor (vgl. Beispiel 2.2.28). Sei

$$O_1 = \varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(B, a) \cap \varepsilon(C, b) = g_A \cap g_B \cap g_C$$

mit

$$\begin{aligned} g_A &= \varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(C, b), \\ g_B &= \varepsilon(B, a) \cap \varepsilon(A, c), \\ g_C &= \varepsilon(C, b) \cap \varepsilon(B, a) \end{aligned}$$

der auf der Brocard-Gerade o des Dreiecks liegende Punkt (siehe Satz 3.2.20).
 Wegen $g_A \subset \varepsilon(A, c)$ berührt der Kreis $\nu(g_A)$ die Seite c in A (Bem. 2.2.19). Wegen $g_A \subset \varepsilon(C, b)$ geht er durch C . Somit ist $\nu(g_A)$ der Kreis k_A .
 Analog ist der Kreis $\nu(g_B)$ ident mit k_B und der Kreis $\nu(g_C)$ ident mit k_C .
 Alle drei Kreise haben den Punkt $\nu(O_1)$ gemeinsam. \square

Definition 3.3.2 Den auf dem Brocard-Kreis $\nu(o)$ eines Dreiecks ABC in μ liegenden Schnittpunkt

$$\nu(O_1) =: \Omega_1$$

der drei Kreise k_A, k_B, k_C in Satz 3.3.1 mit

$$O_1 = \varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(B, a) \cap \varepsilon(C, b) \in o$$

nennt man den **ersten Brocardschen Punkt** des Dreiecks ABC . (Abb. 3.16).

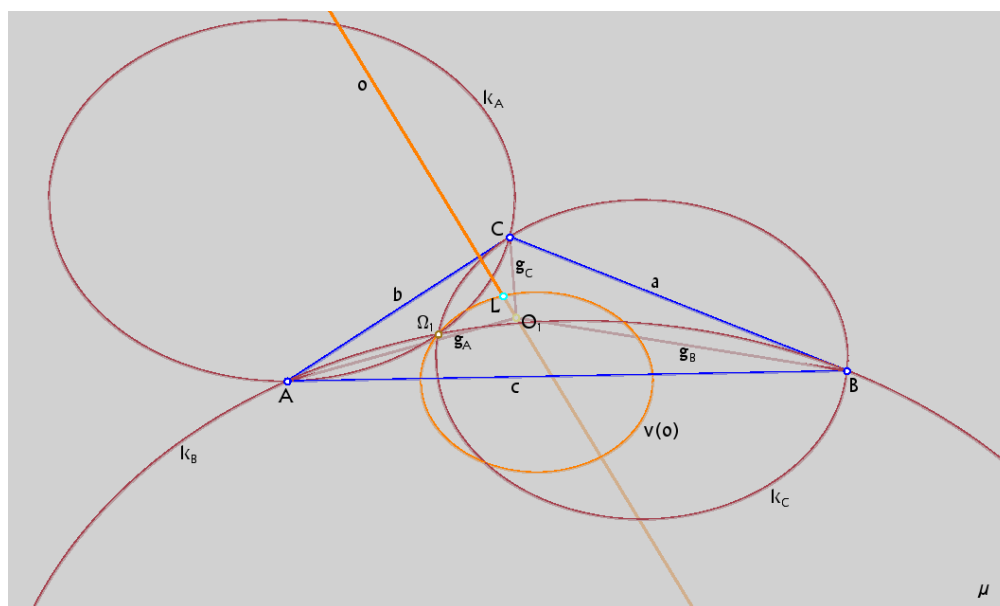


Abbildung 3.16: Satz 3.3.1, Def. 3.3.2

Satz 3.3.3 Sei ABC ein Dreieck in der Bildebene μ und die Kreise k'_A, k'_B, k'_C wie folgt definiert:

k'_A geht durch B und berührt die Seite b in A ,
 k'_B geht durch C und berührt die Seite c in B ,
 k'_C geht durch A und berührt die Seite a in C .

Diese drei Kreise schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt. (Abb. 3.17).

Beweis. Wie in Satz 3.3.1 liegt auch hier eine spezielle Miquelsche Kreiskonfiguration vor. Sei

$$O_2 = \varepsilon(B, c) \cap \varepsilon(C, a) \cap \varepsilon(A, b) = h_A \cap h_B \cap h_C$$

mit

$$h_A = \varepsilon(A, b) \cap \varepsilon(B, c),$$

$$h_B = \varepsilon(B, c) \cap \varepsilon(C, a),$$

$$h_C = \varepsilon(C, a) \cap \varepsilon(A, b)$$

der auf der Brocard-Geraden o des Dreiecks liegende Punkt (siehe Satz 3.2.20).

Wegen $h_A \subset \varepsilon(A, b)$ berührt der Kreis $\nu(h_A)$ die Seite b in A (Bem. 2.2.19). Wegen $h_A \subset \varepsilon(B, c)$ geht er durch B . Somit ist $\nu(h_A)$ der Kreis k'_A .

Analog ist der Kreis $\nu(h_B)$ ident mit k'_B und der Kreis $\nu(h_C)$ ident mit k'_C .

Alle drei Kreise haben den Punkt $\nu(O_2)$ gemeinsam. \square

Definition 3.3.4 Den auf dem Brocard-Kreis $\nu(o)$ eines Dreiecks ABC in μ liegenden Schnittpunkt

$$\nu(O_2) =: \Omega_2$$

der drei Kreise k'_A, k'_B, k'_C in Satz 3.3.3 mit

$$O_2 = \varepsilon(B, c) \cap \varepsilon(C, a) \cap \varepsilon(A, b) \in o$$

nennt man den **zweiten Brocardschen Punkt** des Dreiecks ABC . (Abb. 3.17).

Der folgende Satz zeigt die Besonderheit der Brocardschen Punkte:

Satz 3.3.5 Die Punkte Ω_1 und Ω_2 seien die Brocardschen Punkte eines Dreiecks ABC . Dann schließen die Geraden $A \vee \Omega_1, B \vee \Omega_1, C \vee \Omega_1$ mit den Seiten c bzw. a bzw. b denselben Winkel ω ein.

Auch die Geraden $A \vee \Omega_2, B \vee \Omega_2, C \vee \Omega_2$ schließen mit den Seiten b bzw. c bzw. a diesen Winkel ω ein. (Abb. 3.18).

Beweis. (Siehe auch Abb. 3.19). Es ist $\Omega_2 = \nu(O_2)$ mit $O_2 = \varepsilon(B, c) \cap \varepsilon(C, a) \cap \varepsilon(A, b)$. Wir schneiden die Netzstrahlenebene $\varepsilon(A, b)$ mit der Ebene $\varepsilon \parallel \mu$ und $O_2 \in \varepsilon$. Die Schnittgerade b_2 und damit auch ihr Grundriss b'_2 in μ ist parallel zur Dreieckseite b . Ihre Netzprojektion $\nu(b_2)$ ist die Gerade durch A und Ω_2 . Sie schließt mit ihrem Grundriss b'_2 den

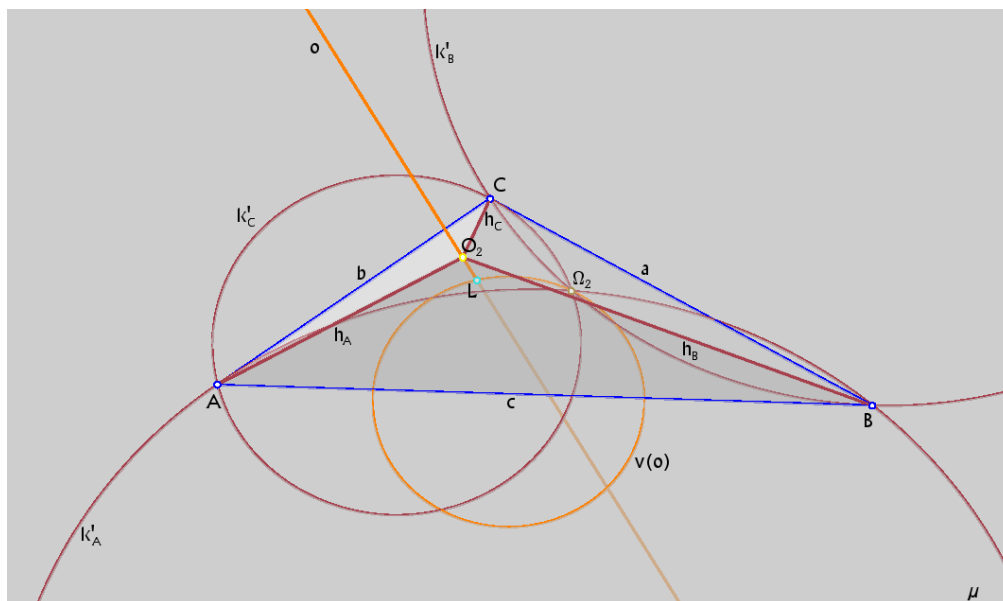


Abbildung 3.17: Satz 3.3.3, Def. 3.3.4

Winkel $\angle \nu(O_2)OO'_2 = \angle \Omega_2 OO'_2$ ein, wobei O der Koordinatenursprung und O'_2 der Grundriss von O_2 in μ ist (Satz 2.2.24). Dieser Winkel wird wegen $b'_2 \parallel b$ auch von den Geraden $\nu(b_2) = A \vee \Omega_2$ und b eingeschlossen.

Analog findet man durch Schnitt der Netzstrahlebenen $\varepsilon(B, c)$ bzw. $\varepsilon(C, a)$ mit ε , dass $B \vee \Omega_2$ und c bzw. $C \vee \Omega_2$ und a denselben Winkel $\angle \Omega_2 OO'_2$ einschließen.

Die Behauptung für $\Omega_1 = \nu(O_1)$ und $O_1 = \varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(B, a) \cap \varepsilon(C, b)$ wird auf gleiche Weise bewiesen, indem man die einzelnen Netzstrahlebenen mit der μ -parallelen Ebene durch O_1 schneidet. Der idente Winkel ist dann $\angle \Omega_1 OO'_1$. Da aber nach Satz 3.2.20 die Punkte O_1 und O_2 von μ denselben Abstand haben, müssen sogar die beiden Winkel $\angle \Omega_1 OO'_1$ und $\angle \Omega_2 OO'_2$ identisch sein (siehe Bem. 2.2.25). \square

Definition 3.3.6 Der zu den Brocardschen Punkten Ω_1 und Ω_2 eines Dreiecks ABC gemäß Satz 3.3.5 gehörende gemeinsame Winkel ω nennt man den **Brocardschen Winkel** des Dreiecks.

Bemerkung 3.3.7 Aus dem Beweis von Satz 3.3.5 wird ersichtlich, dass der Brocardsche Winkel ω eines Dreiecks auch am Brocard-Kreis zu finden ist, nämlich:

$$\omega = \angle \Omega_1 UL = \angle \Omega_2 UL,$$

wobei U der Umkreismittelpunkt und L der Lemoinesche Punkt des Dreiecks sind. (Abb. 3.20).

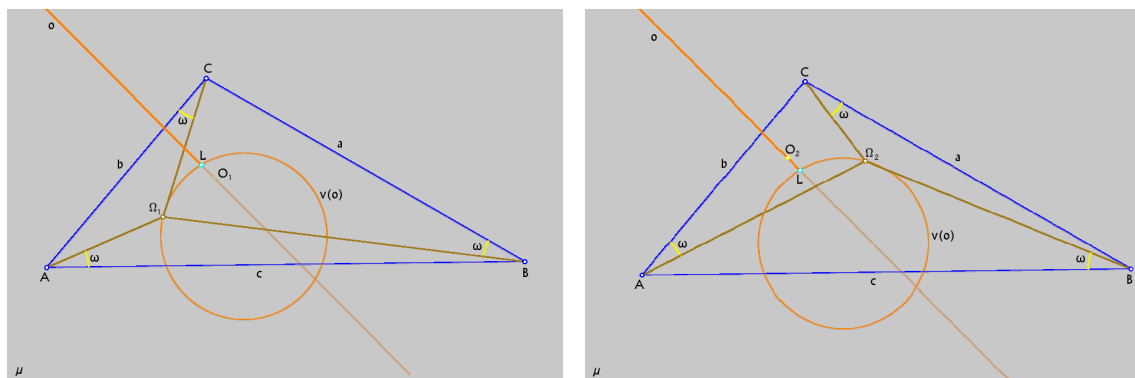


Abbildung 3.18: Satz 3.3.5

Beweis. Man verschiebe das Dreieck zuerst so in μ , dass U in den Koordinatenursprung fällt. Dann ist $O'_1 = O'_2 = L$, weil die Brocard-Gerade o senkrecht auf μ steht. \square

Für die weiteren Betrachtungen nun die folgende Definition und der anschließende Satz (siehe [4]):

Definition 3.3.8 Ist Ω_1 der erste Brocardsche Punkt eines Dreiecks ABC , so nennt man das aus den Schnittpunkten $\neq \Omega_1$ der Geraden $A \vee \Omega_1, B \vee \Omega_1, C \vee \Omega_1$ mit dem Brocard-Kreis gebildete Dreieck das **erste Brocard-Dreieck** von ABC .

Für das erste Brocard-Dreieck gilt eine bemerkenswerte Tatsache:

Satz 3.3.9 Ist Ω_2 der zweite Brocardsche Punkt eines Dreiecks ABC in μ , so bilden die Schnittpunkte $\neq \Omega_2$ der Geraden $A \vee \Omega_2, B \vee \Omega_2, C \vee \Omega_2$ mit dem Brocard-Kreis das **erste Brocard-Dreieck**. Genauer gilt:

$$\begin{aligned} (B \vee \Omega_1) \cap \nu(o) &= (C \vee \Omega_2) \cap \nu(o) = (U \vee M_{BC}) \cap \nu(o) &=: P_a, \\ (C \vee \Omega_1) \cap \nu(o) &= (A \vee \Omega_2) \cap \nu(o) = (U \vee M_{CA}) \cap \nu(o) &=: P_b, \\ (A \vee \Omega_1) \cap \nu(o) &= (B \vee \Omega_2) \cap \nu(o) = (U \vee M_{AB}) \cap \nu(o) &=: P_c \end{aligned}$$

sind die Eckpunkte des ersten Brocard-Dreiecks von ABC , wobei jeweils die Schnittpunkte $\neq \Omega_1$ bzw. $\neq \Omega_2$ bzw. $\neq U$ mit dem Brocard-Kreis $\nu(o)$ (siehe 3.2.24) gemeint sind und Ω_1 der erste Brocardsche Punkt, U der Umkreismittelpunkt und M_{BC}, M_{CA}, M_{AB} die Seitenmitten des Dreiecks ABC sind. (Abb. 3.21).

Beweis. (Siehe auch Abb. 3.22). Wir zeigen exemplarisch die Identität

$$(C \vee \Omega_1) \cap \nu(o) = (A \vee \Omega_2) \cap \nu(o) = (U \vee M_{CA}) \cap \nu(o)$$

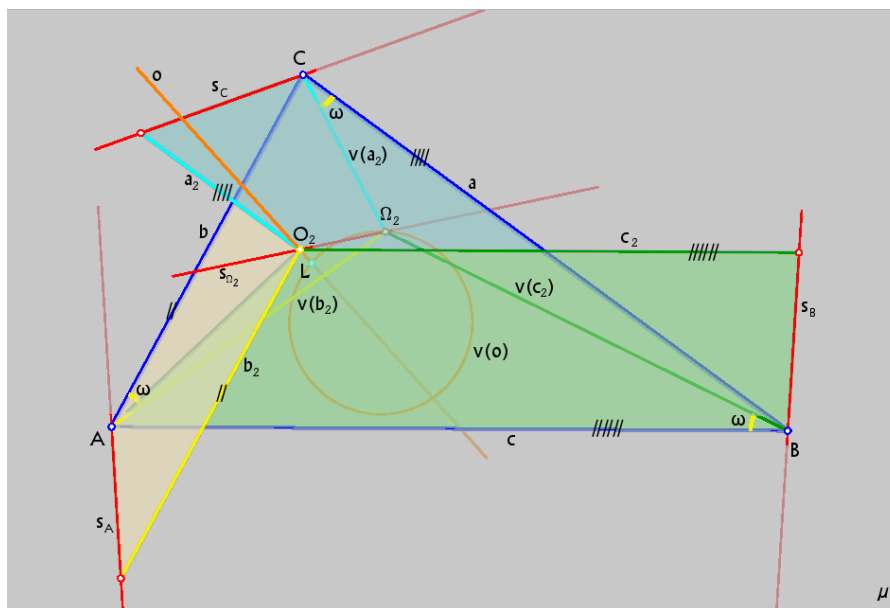


Abbildung 3.19: Beweis des Satzes 3.3.5; Ansicht von oben

und beginnen wie im Beweis von Satz 3.3.5, wobei zuvor o.B.d.A. das Dreieck in μ so verschoben werde, dass U im Koordinatenursprung liegt, wodurch die Brocard-Gerade o senkrecht zu μ ist (Satz 3.2.20):

Die Netzstrahlenebene $\varepsilon(A, b)$ werde mit der Ebene $\varepsilon_2 \parallel \mu$ und $O_2 \in \varepsilon_2$ geschnitten. Die Schnittgerade b_2 ist parallel zur Dreieckseite b . Ihre Netzprojektion $\nu(b_2)$ ist die Gerade $A \vee \Omega_2$, da $O_2 \in b_2$ wegen $O_2 \in \varepsilon(A, b)$.

Weiters werde die Netzstrahlenebene $\varepsilon(C, b)$ mit der Ebene $\varepsilon_1 \parallel \mu$ und $O_1 \in \varepsilon_1$ geschnitten. Die Schnittgerade b_1 ist parallel zur Dreieckseite b . Ihre Netzprojektion $\nu(b_1)$ ist die Gerade $C \vee \Omega_1$, da $O_1 \in b_1$ wegen $O_1 \in \varepsilon(C, b)$.

Sei nun η die von der Brocard-Geraden o und der Geraden b_2 aufgespannte Ebene. Sie steht senkrecht zur Bildebene μ , da dies für o der Fall ist. In η ist auch die Gerade b_1 enthalten. Es ist $\eta = (\eta \cap \mu) \vee h$, wobei h eine zum Netzstrahl s_U durch U parallele und in η liegende Gerade ist. Nach Satz 2.2.27 ist die Netzprojektion $\nu(\eta)$ der Lotfußpunkt von U auf $\eta \cap \mu$. Wegen $(\eta \cap \mu) \parallel b$ liegt also $\nu(\eta)$ auf der Streckensymmetralen $U \vee M_{CA}$ der Seite b .

Der Netzstrahl $s_\eta \subset \eta$ schneidet die in η liegenden Geraden o , b_1 und b_2 . Also schneiden sich deren Netzbilder $\nu(o)$, $\nu(b_1) = C \vee \Omega_1$ und $\nu(b_2) = A \vee \Omega_2$ im Punkt $\nu(\eta) = P_b$. \square

Der Zusammenhang der Seiten eines Dreiecks ABC in der Bildebene μ mit dessen Brocard-Geraden o sowie deren Netzprojektion $\nu(o)$, dem Brocard-Kreis des Dreiecks, zeigt sich insbesondere, wenn man die folgenden harmonischen Involutionen ins Auge

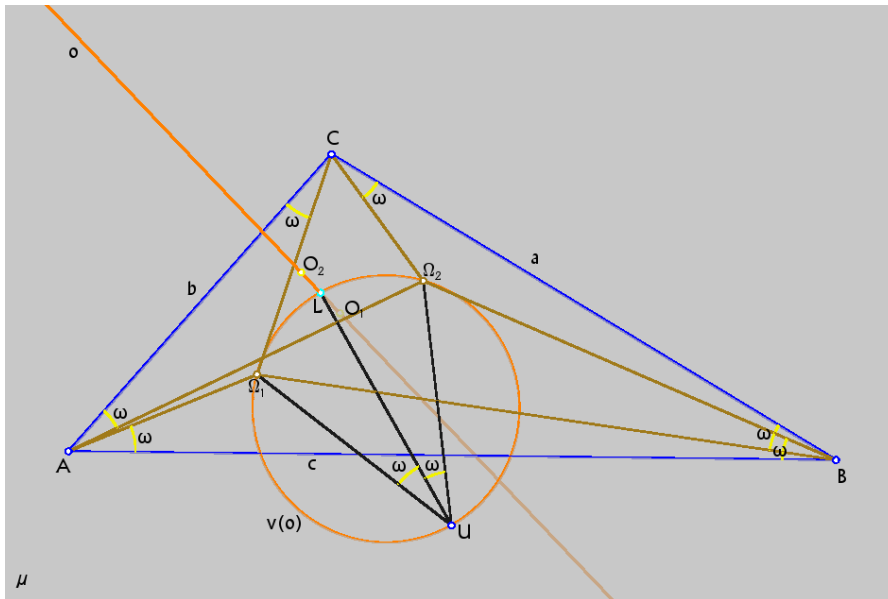


Abbildung 3.20: Bem. 3.3.7

fasst (siehe Def. 3.3.2 und 3.3.4):

- $I(O_1, O_2) :=$ Involution auf o mit den Fixpunkten O_1, O_2 ,
- $I(\Omega_1, \Omega_2) :=$ Involution auf $\nu(o)$ mit den Fixpunkten Ω_1, Ω_2 ,
- $I(A, B) :=$ Involution auf c mit den Fixpunkten A, B ,
- $I(B, C) :=$ Involution auf a mit den Fixpunkten B, C ,
- $I(C, A) :=$ Involution auf b mit den Fixpunkten C, A .

Entsprechen sich zwei Punkte X und Y bzgl. einer der eben definierten Involutionen, so schreiben wir dafür kurz $X \sim Y$.

Für einen Punkt $X \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, der auf keiner der Dreieckseiten liegt, bezeichnen wir die Netzbilder der Ebenen $a \vee X, b \vee X, c \vee X$ mit

$$X_a := \nu(a \vee X), \quad (3.1)$$

$$X_b := \nu(b \vee X), \quad (3.2)$$

$$X_c := \nu(c \vee X). \quad (3.3)$$

Damit gilt

Satz 3.3.10 Sind X, X' zwei Punkte auf der Brocard-Geraden o eines Dreiecks ABC in μ und $X_a, X'_a, X_b, X'_b, X_c, X'_c$ die zugehörigen Punkte gemäß (3.1), (3.2), (3.3), so gilt:

$$X_a \sim X'_a \Leftrightarrow X_b \sim X'_b \Leftrightarrow X_c \sim X'_c \Leftrightarrow X \sim X' \Leftrightarrow \nu(X) \sim \nu(X').$$

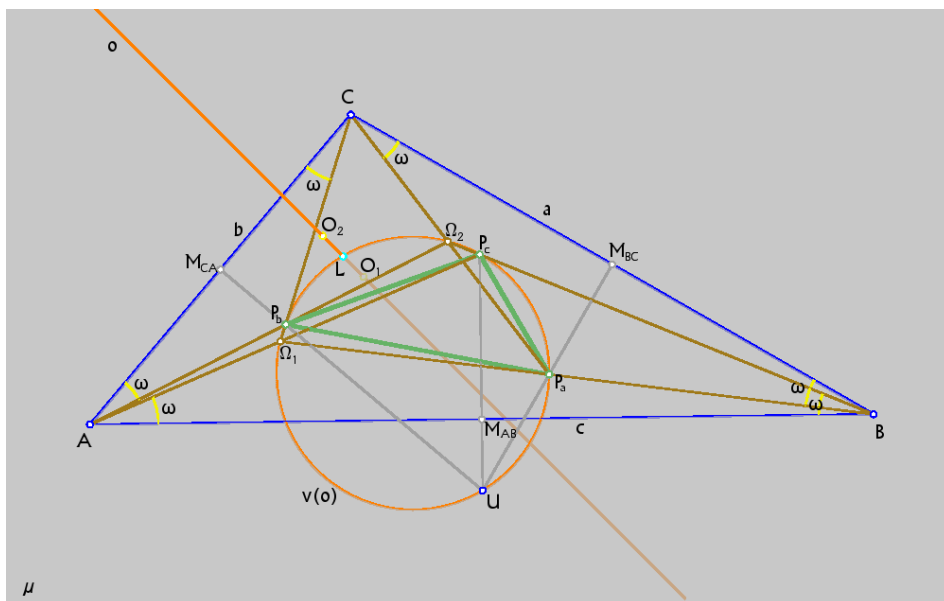


Abbildung 3.21: Satz 3.3.9

Überträgt man die Involutionen $I(A, B)$, $I(B, C)$, $I(C, A)$ mittels der Eckpunkte P_c bzw. P_a bzw. P_b des ersten Brocard-Dreiecks (siehe Satz 3.3.9) auf den Brocardschen Kreis $\nu(o)$, so sind die so übertragenen Involutionen jeweils ident mit der Involution $I(\Omega_1, \Omega_2)$.

Beweis. Aufgrund der Projektivität $\pi: X \mapsto a \vee X \mapsto X_a = \pi_a^{-1}(a \vee X)$ (siehe Bem. 3.1.4) überträgt sich die Involution $I(O_1, O_2)$ auf die Involution $I(B, C)$ der Dreieckseite a , da wegen $O_1 \in \varepsilon(B, a)$ (siehe Satz 3.2.20) der Punkt O_1 auf $\pi(O_1) = \nu(a \vee O_1) = B$ und wegen $O_2 \in \varepsilon(C, a)$ der Punkt O_2 auf $\pi(O_2) = \nu(a \vee O_2) = C$ abgebildet wird.

Damit ist aber auch die Übertragung von $I(B, C)$ auf $I(O_1, O_2)$ gezeigt.

Analog für die Seiten b und c .

Ebenso wird mittels Netzprojektion ν die Involution $I(O_1, O_2)$ auf die Involution $I(\Omega_1, \Omega_2)$ des Brocard-Kreises übertragen, da ν das Doppelverhältnis invariant läßt (Satz 2.2.16).

Zur letzten Behauptung: wird etwa die Involution $I(A, B)$ mittels P_c auf den Brocardschen Kreis $\nu(o)$ übertragen, so wird der Fixpunkt A auf den Fixpunkt Ω_1 und der Fixpunkt B auf den Fixpunkt Ω_2 abgebildet (siehe P_c in Satz 3.3.9). Also muss die übertragene Involution mit $I(\Omega_1, \Omega_2)$ ident sein. \square

Der nächste Satz liefert eine weitere Charakterisierung der Brocard-Geraden eines Dreiecks:

Satz 3.3.11 Sei ABC ein Dreieck in der Bildebene μ mit den Seiten a, b, c und

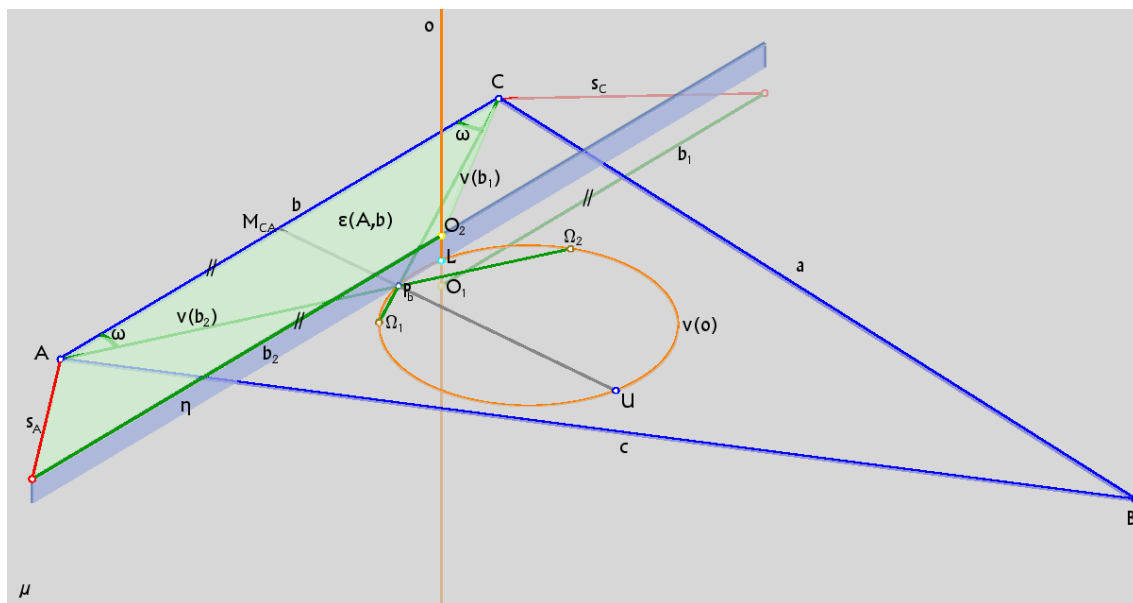


Abbildung 3.22: Beweis des Satzes 3.3.9

$$o := (g_A \vee h_A) \cap (g_B \vee h_B) \cap (g_C \vee h_C)$$

seine Brocard-Gerade mit den Geraden $g_A, h_A, g_B, h_B, g_C, h_C$ wie in Satz 3.2.17. Die Punkte O_1 und O_2 auf o seien definiert wie in Satz 3.2.20.

Zu jedem Punkt $X \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus \mu$ gibt es eindeutig das Punktetripel (X_a, X_b, X_c) , wobei

$$X_a := \nu(a \vee X) \in a,$$

$$X_b := \nu(b \vee X) \in b,$$

$$X_c := \nu(c \vee X) \in c.$$

Dann gilt:

$$X \in o \setminus \mu \Leftrightarrow \text{TV}(X_a, B, C) = \text{TV}(X_b, C, A) = \text{TV}(X_c, A, B).$$

Für $X \in o \setminus \mu$ sind die obigen Teilverhältnisse ident mit

$$\text{DV}(X, O_1, O_2, o \cap \mu) = (1 - \text{DV}(X, o \cap \mu, O_1, O_2))^{-1}.$$

(Abb. 3.23).

Beweis. Die Abbildung $\pi: X \mapsto a \vee X \mapsto X_a = \pi_a^{-1}(a \vee X)$ ist eine Projektivität von o nach a (siehe Bem. 3.1.4) mit $\pi(O_1) = B$, $\pi(O_2) = C$ und $\pi(o \cap \mu) = a_\infty$, der ∞ -ferne

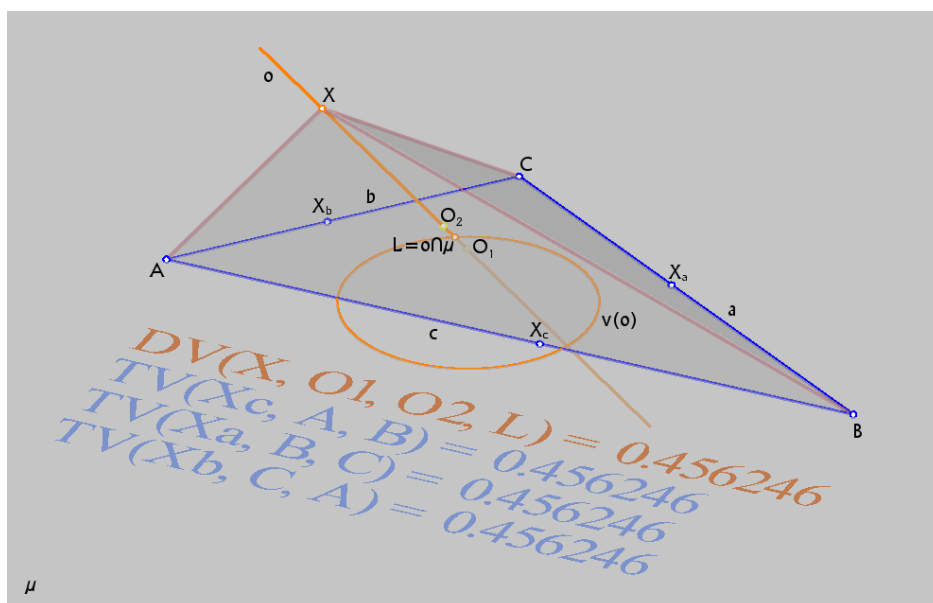


Abbildung 3.23: Satz 3.3.11

Punkt auf a .

Für $X \in o \setminus \mu$ gilt somit:

$$\begin{aligned} \text{TV}(X_a, B, C) &= \text{DV}(X_a, B, C, a_\infty) \\ &= \text{DV}(\pi(X), \pi(O_1), \pi(O_2), \pi(o \cap \mu)) \\ &= \text{DV}(X, O_1, O_2, o \cap \mu). \end{aligned}$$

Ebenso ist $\text{TV}(X_b, C, A) = \text{TV}(X_c, A, B) = \text{DV}(X, O_1, O_2, o \cap \mu)$.

Ist umgekehrt $\text{TV}(X_a, B, C) = \text{TV}(X_b, C, A) = \text{TV}(X_c, A, B)$, so gilt für

$$\begin{aligned} X_1 &:= \varepsilon(X_a, a) \cap o, \\ X_2 &:= \varepsilon(X_b, b) \cap o, \\ X_3 &:= \varepsilon(X_c, c) \cap o \end{aligned}$$

wie zuvor:

$$\begin{aligned} \text{TV}(X_a, B, C) &= \text{TV}((X_1)_a, B, C) = \text{DV}(X_1, O_1, O_2, o \cap \mu), \\ \text{TV}(X_b, C, A) &= \text{TV}((X_2)_b, C, A) = \text{DV}(X_2, O_1, O_2, o \cap \mu), \\ \text{TV}(X_c, A, B) &= \text{TV}((X_3)_c, A, B) = \text{DV}(X_3, O_1, O_2, o \cap \mu), \end{aligned}$$

also $\text{DV}(X_1, O_1, O_2, o \cap \mu) = \text{DV}(X_2, O_1, O_2, o \cap \mu) = \text{DV}(X_3, O_1, O_2, o \cap \mu)$. Daraus folgt $X_1 = X_2 = X_3 = X \in o \setminus \mu$.

Die Identität $\text{DV}(X, O_1, O_2, o \cap \mu) = (1 - \text{DV}(X, o \cap \mu, O_1, O_2))^{-1}$ folgt aus den Vertauschungsregeln für das Doppelverhältnis (siehe z.B. [8]). \square

Aus dem letzten Satz ergibt sich eine hinreichende Bedingung dafür, dass der Miquelpunkt einer Miquelschen Kreiskonfiguration eines Dreiecks (siehe Beispiel 2.2.28) auf dessen Brocard-Kreis liegt:

Bemerkung 3.3.12 Seien ABC ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und $X_a \in a, X_b \in b, X_c \in c$ drei weitere Punkte. Die zugehörigen Miquelkreise sind

$$\begin{aligned} k_A &\text{ durch } A, X_b, X_c, \\ k_B &\text{ durch } B, X_c, X_a, \\ k_C &\text{ durch } C, X_a, X_b. \end{aligned}$$

Sie schneiden sich im Miquelpunkt M .

Sind nun die Teilverhältnisse $\text{TV}(X_a, B, C), \text{TV}(X_b, C, A), \text{TV}(X_c, A, B)$ alle ident, so liegt der Miquelpunkt M auf dem Brocard-Kreis von ABC .

Die Umkehrung gilt allerdings nicht, da es unendlich viele Geraden in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ gibt, deren Netzbild der Brocard-Kreis von ABC ist (siehe Bem. 2.2.26).

Mit folgenden Teilverhältnissen erhalten wir als Miquelpunkte die speziellen Punkte auf dem Brocard-Kreis (Sätze 3.2.20, 3.3.11, Def. 3.3.2, 3.3.4):

$$\begin{aligned} \text{TV}(X_a, B, C) = \text{TV}(X_b, C, A) = \text{TV}(X_c, A, B) = \frac{1}{2} &\Rightarrow M = U, \\ \text{TV}(X_a, B, C) = \text{TV}(X_b, C, A) = \text{TV}(X_c, A, B) = 1 &\Rightarrow M = \Omega_1, \\ \text{TV}(X_a, B, C) = \text{TV}(X_b, C, A) = \text{TV}(X_c, A, B) = 0 &\Rightarrow M = \Omega_2. \end{aligned}$$

Eine weitere Folgerung aus den Eigenschaften der Brocard-Geraden o eines Dreiecks ist

Satz 3.3.13 Die Voraussetzungen seien wie in Satz 3.3.11.

Dann sind für alle Punkte $X \in o \setminus \mu$ die Schwerpunkte der Dreiecke ABC und $X_a X_b X_c$ identisch. (Abb. 3.24).

Beweis. Ist $X \in o \setminus \mu$, so sind nach Satz 3.3.11 die Teilverhältnisse $\text{TV}(X_a, B, C), \text{TV}(X_b, C, A), \text{TV}(X_c, A, B)$ ident, d.h. es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (Bem. 2.2.15), sodass

$$\begin{aligned} X_a &= \lambda B + (1 - \lambda)C, \\ X_b &= \lambda C + (1 - \lambda)A, \\ X_c &= \lambda A + (1 - \lambda)B. \end{aligned}$$

Also ist

$$1/3(X_a + X_b + X_c) = 1/3[(\lambda(A + B + C) + (1 - \lambda)(A + B + C))] = 1/3(A + B + C).$$

□

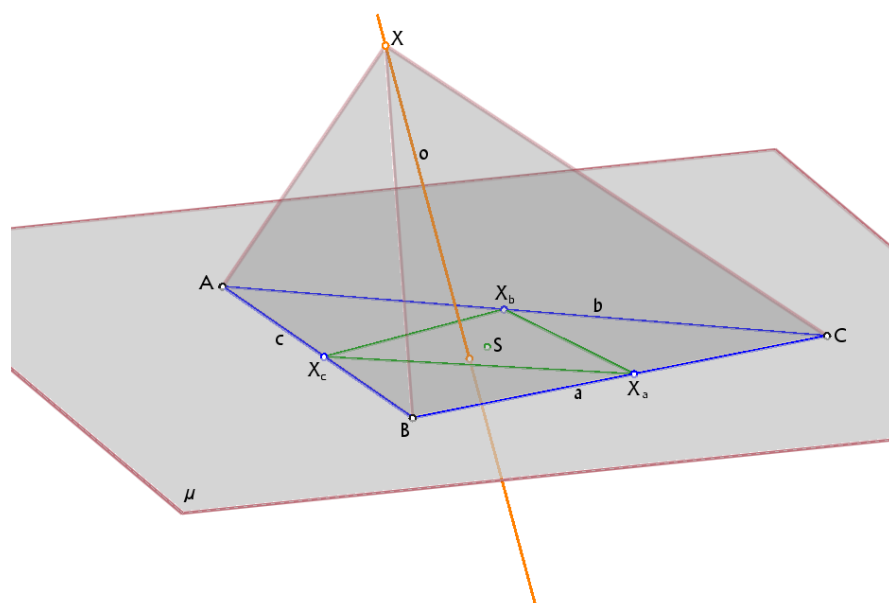


Abbildung 3.24: Satz 3.3.13

Zum Schluss dieses Abschnitts kehren wir nochmals zurück zu den Artzt-Parabeln eines Dreiecks:

Satz 3.3.14 Sei ABC ein Dreieck in der Bildebene μ und o die zugehörige Brocard-Gerade (Satz 3.2.17). Durch o werden gemäß Satz 3.2.17 die drei Artzt-Parabeln

$$\begin{aligned} &Par(o, b, c) \text{ mit den Linienelementen } (C, b), (B, c), \\ &Par(o, c, a) \text{ mit den Linienelementen } (A, c), (C, a), \\ &Par(o, a, b) \text{ mit den Linienelementen } (B, a), (A, b) \end{aligned}$$

erzeugt. Zu jedem Punkt $X \in o \setminus \mu$ gibt es Tangenten mit zugehörigen Berührungspunkten (Sätze 3.2.1 und 3.2.10):

$$\begin{aligned} &t_A \text{ an Parabel } Par(o, b, c) \text{ mit Berührungspunkt } T_A, \\ &t_B \text{ an Parabel } Par(o, c, a) \text{ mit Berührungspunkt } T_B, \\ &t_C \text{ an Parabel } Par(o, a, b) \text{ mit Berührungspunkt } T_C \end{aligned}$$

und es gilt: Die Dreiecke ABC und $T_A T_B T_C$ haben denselben Schwerpunkt. (Abb. 3.25).

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir

Lemma 3.3.15 Gegeben sei ein Dreieck ABC in μ mit der zugehörigen Brocard-Geraden o und den beiden Punkten

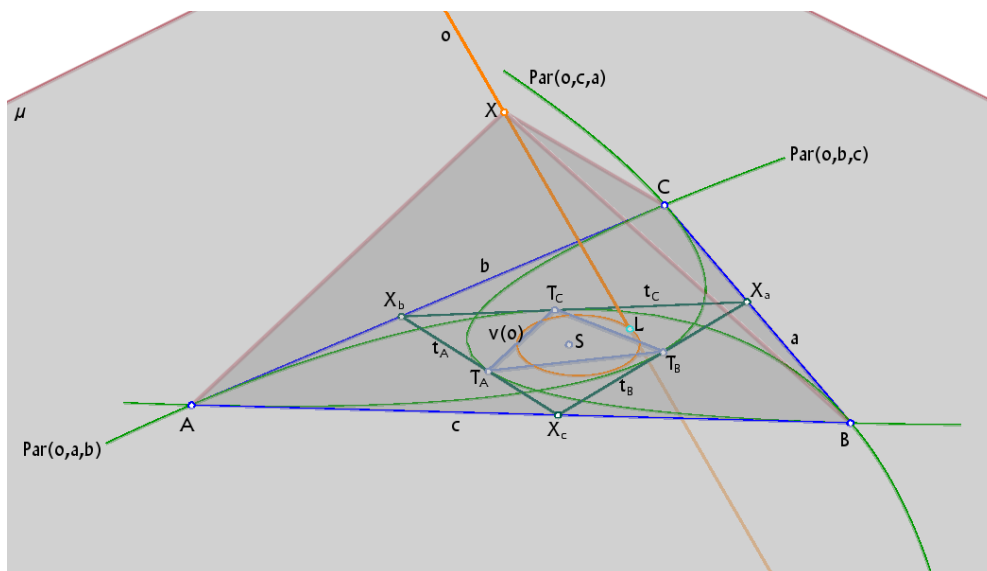


Abbildung 3.25: Satz 3.3.14

$$O_1 = \varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(B, a) \cap \varepsilon(C, b),$$

$$O_2 = \varepsilon(B, c) \cap \varepsilon(C, a) \cap \varepsilon(A, b)$$

auf o . Sei $s \in \mathcal{E}$ der Netzstrahl durch den Brennpunkt F_{bc} der Artzt-Parabel $\text{Par}(o, b, c)$ (es ist $s \subset A \vee o$ nach Satz 3.2.4) und $X \in o \setminus \mu$, $X \notin \{O_1, O_2\}$. Die zu X gehörende Tangente an die Parabel gemäß Satz 3.2.1 ist $t_A = X_b \vee X_c$, wobei $X_b = \nu(b \vee X) \in b$ und $X_c = \nu(c \vee X) \in c$.

Weiters seien $Y_1 := (A \vee O_1) \cap s$ und $Y_2 := (A \vee O_2) \cap s$. Dann gilt für die Netzprojektionen der Ebenen $t_A \vee Y_1$ und $t_A \vee Y_2$:

$$\nu(t_A \vee Y_1) = X_b,$$

$$\nu(t_A \vee Y_2) = X_c.$$

(Abbildungen 3.26 und 3.27).

Beweis. Die Dreieckseite b ist Tangente der Parabel $\text{Par}(o, b, c)$ mit dem Berührungspunkt C . Wegen $X \neq O_1$ sind die Tangenten t_A und b verschieden. Wir definieren die Gerade

$$h := Y_1 \vee X_b.$$

Diese liegt in der Ebene $Y_1 \vee b = O_1 \vee b = \varepsilon(C, b)$. Wegen $Y_1 \in s$ ist $\nu(Y_1) = F_{bc}$, also die Netzprojektion $\nu(h)$ ein Kreis durch die Punkte F_{bc} , X_b und $C = \nu(\varepsilon(C, b))$.

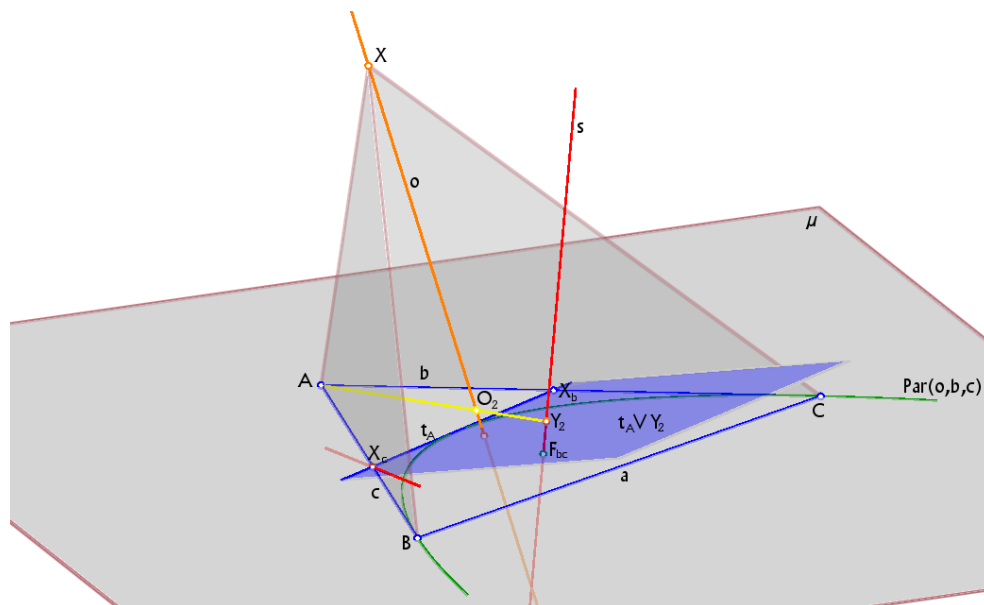


Abbildung 3.26: Lemma 3.3.15

Die beiden Parabeltangente $b \neq t_A$ haben den Schnittpunkt X_b . Legt man gemäß Satz 3.1.5 einen Kreis k durch X_b und den Brennpunkt F_{bc} so, dass dieser t_A in X_b berührt, so ist der zweite Schnittpunkt von k mit b der Berührungspunkt von b . Dieser ist C , sodass der Kreis $\nu(h)$ mit k ident sein muss. Also berührt $\nu(h)$ die Tangente t_A in X_b . Nach Bemerkung 2.2.19 muss aber dann wegen $h \subset t_A \vee Y_1$ gelten: $\nu(t_A \vee Y_1) = X_b$.

Die Behauptung $\nu(t_A \vee Y_2) = X_c$ wird analog bewiesen, indem $h := Y_2 \vee X_c$ und die Tangente c verwendet werden. \square

Mit Hilfe von Lemma 3.3.15 nun der Beweis des Satzes 3.3.14:

Beweis. (Siehe auch Abb. 3.28). Für $X \in \{O_1, O_2\}$ sind die zugehörigen Parabeltangente gleich den Dreieckseiten mit den Berührungspunkten A, B, C . Die Behauptung ist also dann trivial.

Sei also $X \notin \{O_1, O_2\}$ ein fix gewählter Punkt auf der Brocard-Gerade o des Dreiecks und t_A die zugehörige Tangente mit Berührungspunkt T_A .

Weiters sei s der Netzstrahl durch den Brennpunkt F_{bc} der Artzt-Parabel $Par(o, b, c)$, also $s \subset A \vee o$ nach Satz 3.2.4. Jedem Punkt $Y_o \in o$ ist der Punkt $Y := (A \vee Y_o) \cap s$ bijektiv zugeordnet. Diese Abbildung $Y_o \mapsto Y$ ist eine Perspektivität von o nach s . Da auch die Abbildung $Y \mapsto t_A \vee Y$ perspektiv ist, ist die Funktion $Y \mapsto \nu(t_A \vee Y)$ eine Projektivität von s nach t_A (siehe Bem. 3.1.4). Insgesamt haben wir also die Projektivität

$$\begin{aligned} \varphi : o &\rightarrow t_A \\ Y_o &\mapsto \nu(t_A \vee Y) \end{aligned}$$

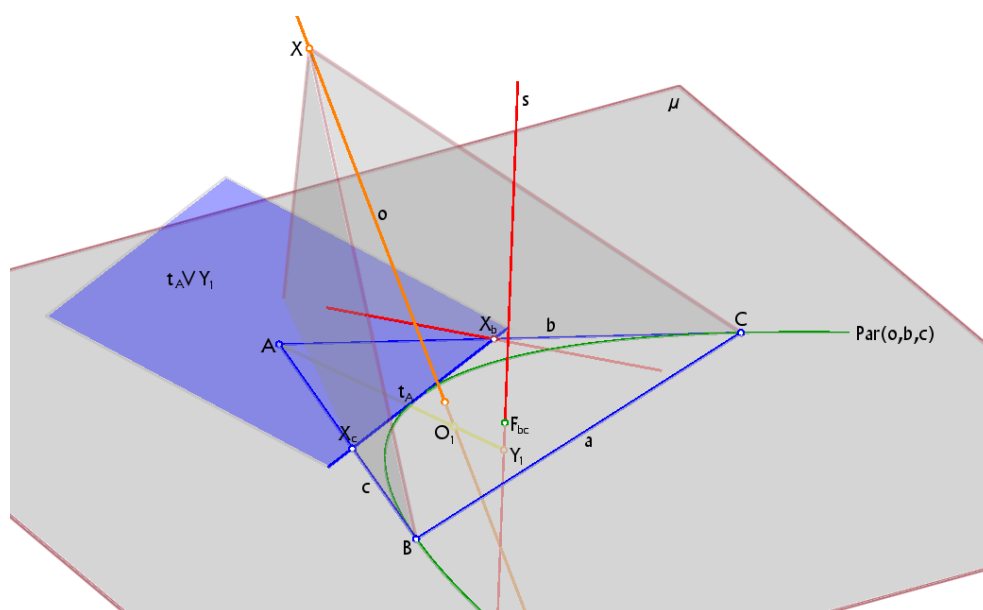


Abbildung 3.27: Lemma 3.3.15

mit $Y = (A \vee Y_o) \cap s$.

Für φ gilt nach Satz 3.2.10 bzw. Lemma 3.3.15:

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= T_A, \\ \varphi(O_1) &= X_b, \\ \varphi(O_2) &= X_c.\end{aligned}$$

Es ist somit

$$DV(X, O_1, O_2, o \cap \mu) = DV(T_A, X_b, X_c, (t_A)_\infty) = TV(T_A, X_b, X_c).$$

Zum Punkt X gilt analog für die Tangenten t_B und t_C der anderen beiden Artzt-Parabeln:

$$DV(X, O_1, O_2, o \cap \mu) = DV(T_B, X_c, X_a, (t_B)_\infty) = TV(T_B, X_c, X_a)$$

bzw.

$$DV(X, O_1, O_2, o \cap \mu) = DV(T_C, X_a, X_b, (t_C)_\infty) = TV(T_C, X_a, X_b).$$

Wir erhalten also die Identität

$$TV(T_A, X_b, X_c) = TV(T_B, X_c, X_a) = TV(T_C, X_a, X_b).$$

Wie im Beweis von Satz 3.3.13 ergibt sich daraus, dass der Schwerpunkt des Dreiecks $T_A T_B T_C$ gleich jenem des Dreiecks $X_a X_b X_c$ ist. Das letztere hat aber nach eben diesem Satz den gleichen Schwerpunkt wie ABC . \square

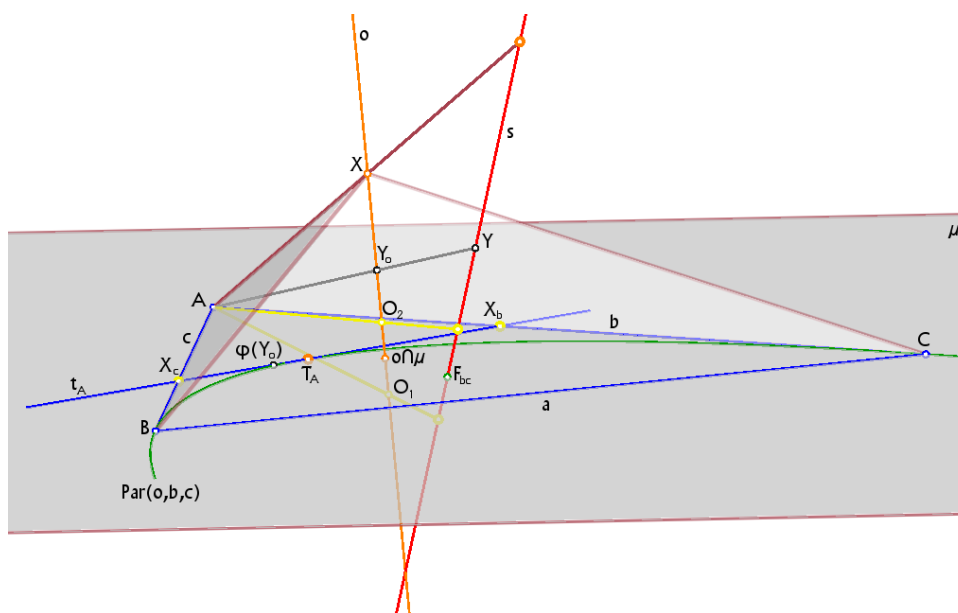


Abbildung 3.28: Beweis des Satzes 3.3.14

3.4 Die harmonisch Konjugierten der Brocard-Geraden

In diesem Abschnitt wird die Brocard-Gerade o eines Dreiecks als Ausgangsobjekt verwendet, um zu weiteren Geraden zu kommen, die mit ihr bzgl. des gegebenen Dreiecks und mittels des elliptischen Netzes \mathcal{E} in engem Zusammenhang stehen.

Drei paarweise windschiefe Geraden g, h, l in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ bestimmen eindeutig eine Regelschar $R := (g, h, l)$, in der g, h, l enthalten sind (siehe Satz 1.3.3). In dieser von g, h, l aufgespannten Regelschar R gibt es genau eine Gerade m , die zu g, h, l harmonisch liegt, d.h. für das Doppelverhältnis gilt:

$$\text{DV}(g, h, l, m) = -1.$$

(Das Doppelverhältnis von vier Geraden einer Regelschar ist definiert über den Schnitt mit einer beliebigen Leitgeraden; siehe auch Def. 2.2.7).

Man sagt, die Regelgerade m ist **harmonisch konjugiert** zur Regelgeraden l bzgl. g, h oder auch: die Regelgeradenpaare (g, h) und (l, m) bilden eine *harmonische hyperbolische Gruppe* (siehe etwa [1]).

Dem eben beschriebenen Sachverhalt liegt allgemeiner die *harmonische axiale Kollineation* Φ_{gh} in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ mit den beiden Achsen g und h zu Grunde:

Die Fixpunkte von Φ_{gh} sind genau die Punkte auf g und h . Ein Punkt $P \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, der auf keiner der Achsen g oder h liegt, hat den bzgl. g und h

harmonisch konjugierten Punkt

auf der durch P gehenden und die Achsen schneidenden Geraden als Bildpunkt.

Zu einem Punkt P in der Bildebene μ sei s_P der Netzstrahl aus \mathcal{E} durch P .

Sind P, Q zwei verschiedene Punkte in μ , so bezeichnen wir die zu den Achsen s_P, s_Q gehörende harmonische axiale Kollineation (harmonische Konjugation) kurz mit Φ_{PQ} (statt $\Phi_{s_P s_Q}$). Die Kollineation Φ_{PQ} bildet jeden Netzstrahl $s \in \mathcal{E}$ auf den bzgl. s_P, s_Q harmonisch konjugierten Netzstrahl $s' \in \mathcal{E}$ ab (nach Satz 1.3.13(c) ist \mathcal{E} Regelschar abgeschlossen). Die harmonische Konjugation Φ_{PQ} läßt also das elliptische Netz \mathcal{E} invariant. Nach Satz 1.8.1 gibt es also genau ein $\varphi_{PQ} \in \Gamma(\mathbb{C})$ oder genau ein $\varphi_{PQ} \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$, sodass

$$\Phi_{PQ} \in \widehat{\varphi_{PQ}} \text{ bzw. } \Phi_{PQ} \in \widetilde{\varphi_{PQ}}.$$

Satz 3.4.1 *Ist Φ_{PQ} die harmonische Konjugation mit den Achsen s_P, s_Q aus \mathcal{E} , so ist Φ_{PQ} eine gleichsinnige netzerhaltende Kollineation, also*

$$\Phi_{PQ} \in \widehat{\varphi_{PQ}},$$

wobei $\varphi_{PQ} \in \Gamma(\mathbb{C})$ die harmonische Involution mit den Fixpunkten P, Q ist.

Beweis. Sei $R \in \mu$ ein Punkt, $R \notin \{P, Q\}$, und $T := \nu(\Phi_{PQ}(R))$ das Netzbild des Bildpunktes $\Phi_{PQ}(R)$. Dann bilden die Netzstrahlen s_P, s_Q, s_R, s_T ein harmonisches Quadrupel, also $DV(s_P, s_Q, s_R, s_T) = -1$. Da die Netzprojektion ν das Doppelverhältnis invariant läßt (Satz 2.2.16), ist somit auch $DV(P, Q, R, T) = -1$. Die zu Φ_{PQ} gehörende Möbius-Transformation φ_{PQ} ist also die harmonische Involution in $\Gamma(\mathbb{C})$ mit den Fixpunkten P, Q und $\varphi_{PQ}(R) = T$, da die Involutionen in $\Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ entweder keinen Fixpunkt oder einen Möbiuskreis als Fixpunktmenge besitzen (siehe [11]). \square

Bemerkung 3.4.2 Da vier verschiedene Punkte $P, Q, R, T \in \mu$ genau dann gemeinsam auf einem Möbiuskreis liegen, wenn $DV(P, Q, R, T) \in \mathbb{R}$ ist (siehe Satz 2.2.17), läßt φ_{PQ} in Satz 3.4.1 jeden Möbiuskreis durch P, Q invariant.

Der zu R bzgl. P, Q harmonische Bildpunkt $T = \varphi_{PQ}(R)$ läßt sich, wenn P, Q, R auf einem Kreis k liegen, folgendermaßen konstruktiv ermitteln (siehe [11], S.75): man lege in P und Q Tangenten an den Kreis k und durch deren Schnittpunkt und R eine Gerade. Der zweite Schnittpunkt dieser Geraden mit k ist der Bildpunkt T .

Nach dieser Einleitung nun der

Satz 3.4.3 *Sei ABC ein Dreieck in μ und o seine Brocard-Gerade. Nach Satz 3.2.17 ist o windschief zu den Netzstrahlen s_A, s_B, s_C . Die Geraden o_1, o_2, o_3 seien die zu o bzgl. der Netzstrahlenpaare (s_A, s_B) bzw. (s_B, s_C) bzw. (s_C, s_A) harmonisch konjugierten Geraden. Die Spurpunkte von o_1, o_2, o_3 in μ seien*

$$\begin{aligned} A' &:= o_2 \cap \mu, \\ B' &:= o_3 \cap \mu, \\ C' &:= o_1 \cap \mu. \end{aligned}$$

Dann gilt: $A'B'C'$ ist das Tangentialdreieck von ABC , d.h. ABC hat bzgl. seines Umkreises die Tangenten

$$\begin{aligned} A' \vee B' &\text{ in } C, \\ B' \vee C' &\text{ in } A, \\ C' \vee A' &\text{ in } B. \end{aligned}$$

(Abb. 3.29).

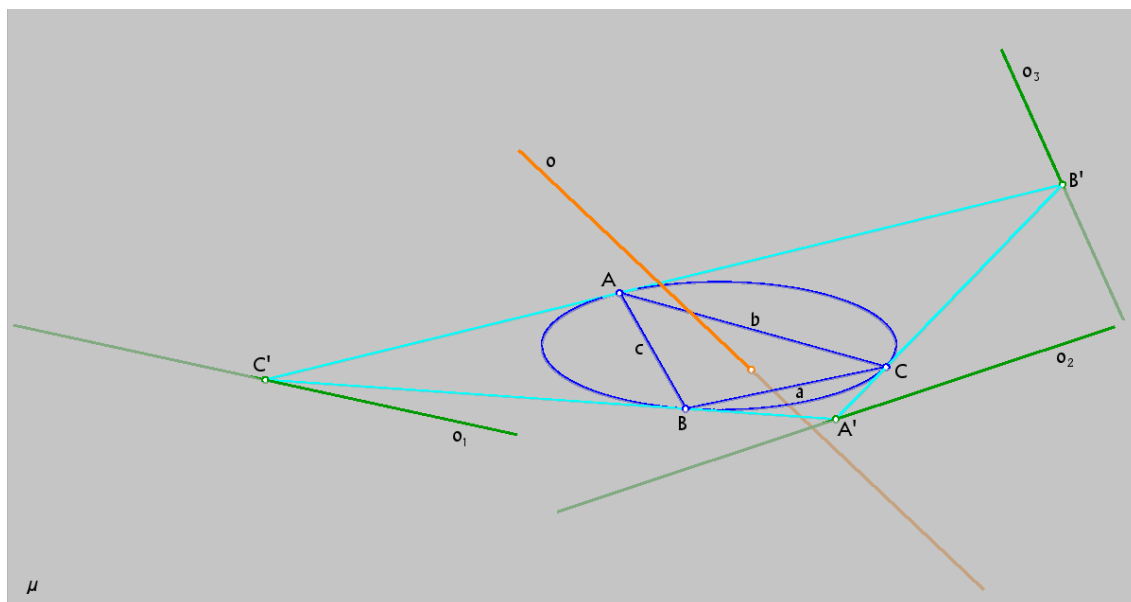


Abbildung 3.29: Satz 3.4.3

Beweis. (Siehe auch Abb. 3.30). Das Dreieck ABC werde so in μ verschoben, dass sein Umkreismittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Damit ist der unendlich ferne Punkt o_∞ der Brocard-Geraden o gleich $(0, 0, 0, 1)\mathbb{R}$ (siehe Satz 3.2.20 und Bem. 3.2.23).

Seien

$$\begin{aligned} h &:= (s_A \vee o_\infty) \cap (s_B \vee o_\infty), \\ H_1 &:= h \cap s_B, \\ H_2 &:= h \cap s_A. \end{aligned}$$

Die Ebenen $s_A \vee o_\infty$ und $s_B \vee o_\infty$ stehen senkrecht auf μ . Ihre Schnittgeraden mit μ sind die Tangenten t_A, t_B an den Umkreis von ABC in A bzw. B . Die Punkte H_1 und H_2 liegen symmetrisch zu μ . Somit ist der auf h zu o_∞ bzgl. H_1 und H_2 harmonisch konjugierte Punkt gleich $h \cap \mu$. Dieser Punkt liegt auf der zu o bzgl. (s_A, s_B) harmonisch konjugierten Geraden o_1 und auf den Tangenten t_A und t_B , also $C' = o_1 \cap \mu = h \cap \mu = t_A \cap t_B$.

Analog für A' und B' . □

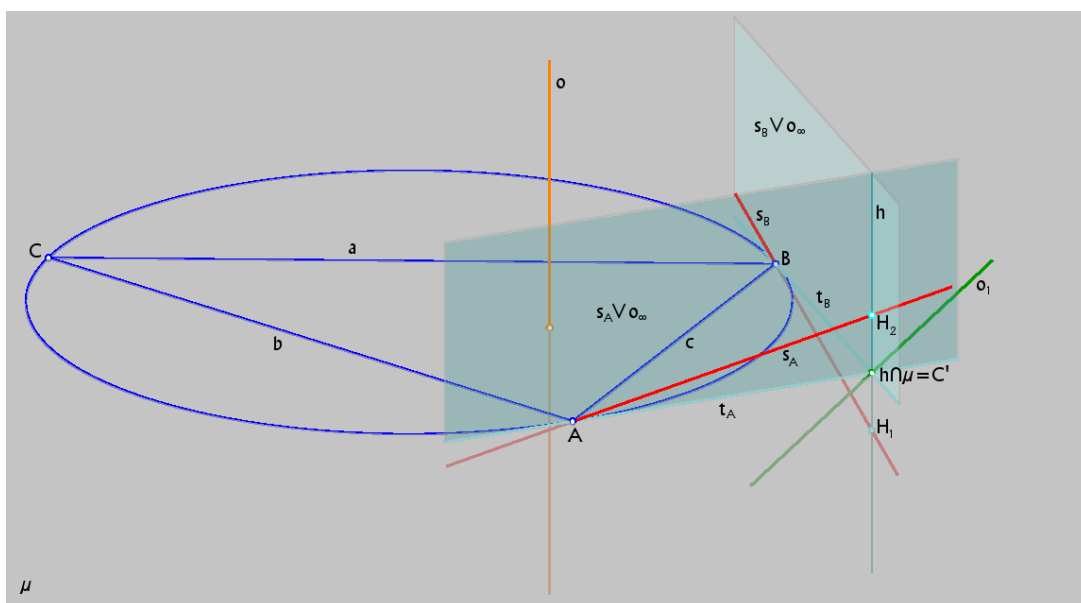


Abbildung 3.30: Beweis des Satzes 3.4.3

Mit Hilfe des Tangentialdreiecks $A'B'C'$ zu einem Dreieck ABC läßt sich der Lemoinesche Punkt L von ABC auf eine weitere Art charakterisieren, denn es gilt

Satz 3.4.4 *Ist ABC ein Dreieck in μ und $A'B'C'$ sein Tangentialdreieck, so sind ABC und $A'B'C'$ perspektiv zueinander mit Zentrum L , dem Lemoineschen Punkt von ABC . (Abb. 3.31).*

Beweis. (Siehe auch Abb. 3.32). Es werde ABC so in μ verschoben, dass sein Umkreismittelpunkt U im Ursprung liegt, also der Netzstrahl s_U in U senkrecht zu μ ist (siehe Bem. 3.2.23). Damit sind sowohl die Brocard-Gerade o von ABC als auch die Gerade

$$h := (s_A \vee o_\infty) \cap (s_B \vee o_\infty)$$

senkrecht zu μ , wobei s_A und s_B die Netzstrahlen in A bzw. B sind.

Wir zeigen, dass die Punkte C, L und $C' = h \cap \mu$ (siehe Beweis von Satz 3.4.3) kollinear sind. Seien

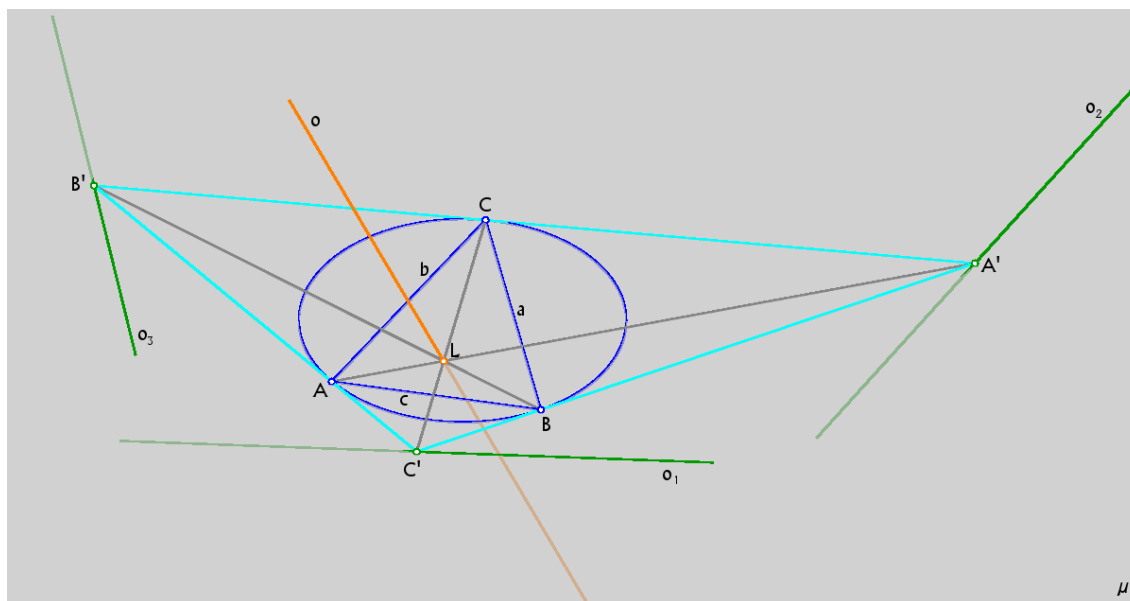


Abbildung 3.31: Satz 3.4.4

$$H_1 := h \cap s_B,$$

$$H_2 := h \cap s_A.$$

Der Punkt $O_2 = \varepsilon(B, c) \cap \varepsilon(C, a) \cap \varepsilon(A, b)$ liegt auf o und auf der Geraden

$$h_C = \varepsilon(C, a) \cap \varepsilon(A, b)$$

(siehe Satz 3.2.20).

Wegen $H_2 \in s_A$ ist insbesondere

$$H_2 \in b \vee s_A = \varepsilon(A, b).$$

Sei $\overline{s_B}$ der an der Bildebene μ gespiegelte Strahl s_B . Wegen $H_1 \in s_B$ und da H_1 und H_2 symmetrisch zu μ liegen, ist $H_2 \in \overline{s_B}$. Da nun die Grundrisse der Geraden $s_C \in \mathcal{E}$ und $\overline{s_B}$ denselben Winkel mit der Dreieckseite a einschliessen und beide Geraden dieselbe Steigung bzgl. μ besitzen, sind die Ebenen $a \vee s_C$ und $a \vee \overline{s_B}$ ident. Also ist

$$H_2 \in a \vee \overline{s_B} = a \vee s_C = \varepsilon(C, a).$$

Insgesamt folgt also, dass $H_2 \in h_C$. Da auch C und O_2 auf h_C liegen, sind die Punkte C , O_2 und H_2 kollinear. Dasselbe gilt dann aber auch für deren Normalprojektionen C , L , C' auf die Bildebene μ .

Analog zeigt man die Kollinearität der Punkte A , L , A' bzw. B , L , B' . □

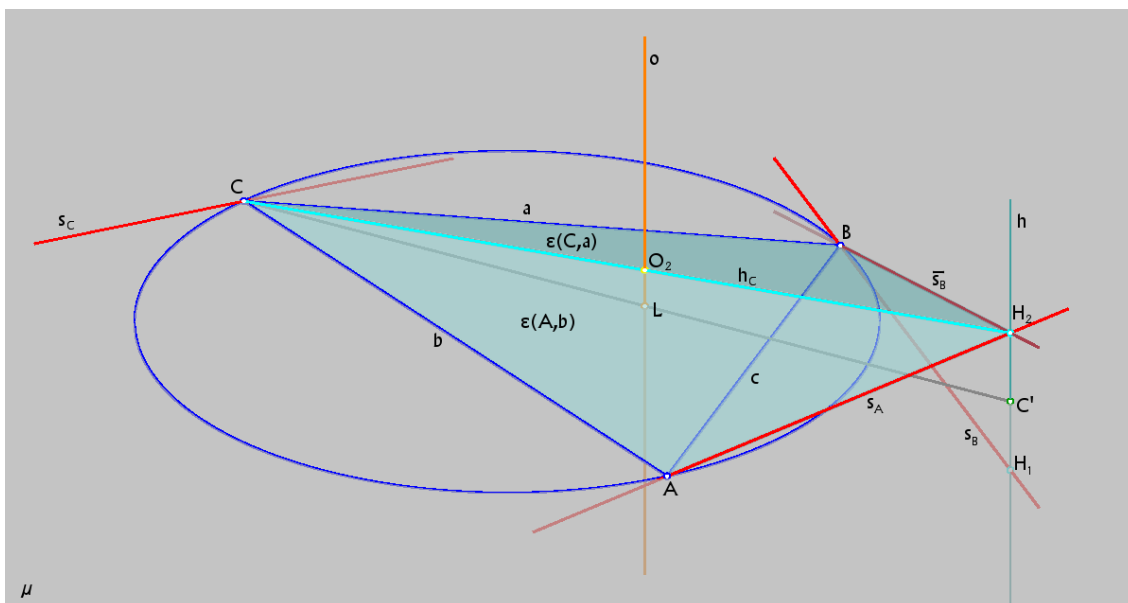


Abbildung 3.32: Beweis des Satzes 3.4.4

3.5 Ausblicke

3.5.1 Im Beweis von Satz 3.2.20 wurde die Gerade $h_A = \varepsilon(A, b) \cap \varepsilon(B, c)$ eines Dreiecks ABC , dessen Umkreismittelpunkt der Koordinatenursprung ist, an der den Winkel α halbierenden und zur Bildebene μ senkrechten Ebene ε_α gespiegelt. Der Grundriss \tilde{h}'_A der an ε_α gespiegelten Geraden \tilde{h}_A in μ stellte sich heraus als die Mediane, der Grundriss h'_A von \tilde{h}_A demzufolge als die Symmediane durch A .

Die Spiegelung von h_A an ε_α geschah durch Spiegelung der Ebenen $\varepsilon(A, b)$ und $\varepsilon(B, c)$ und wir hatten folgende Zuordnung:

$$h_A = (b \vee s_A) \cap (c \vee s_B) \rightarrow \tilde{h}_A = (c \vee \tilde{s}_A) \cap (b \vee \check{s}_B).$$

Dabei galt für die Strahlen \tilde{s}_A und \check{s}_B :

$$\begin{aligned} \tilde{s}_A &\parallel s_{W_\alpha}, \\ \check{s}_B &\parallel \overline{s_{W_\alpha}}, \end{aligned}$$

wobei s_{W_α} der Netzstrahl $\in \mathcal{E}$ im Schnittpunkt W_α der Winkelhalbierenden von α mit dem Umkreis von ABC und $\overline{s_{W_\alpha}}$ der an der Bildebene μ gespiegelte Strahl s_{W_α} ist.

Nun lässt sich die Spiegelung der Geraden $g_A = \varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(C, b)$ an ε_α ganz analog durch folgende Zuordnung beschreiben:

$$g_A = (c \vee s_A) \cap (b \vee s_C) \rightarrow \tilde{g}_A = (b \vee \tilde{s}_A) \cap (c \vee \check{s}_B).$$

Dabei ist die Ebene $b \vee \tilde{s}_A$ das Spiegelbild der Ebene $b \vee \check{s}_B$ und die Ebene $c \vee \check{s}_B$ das Spiegelbild der Ebene $c \vee \tilde{s}_A$ bzgl. μ . Diese Symmetrieeigenschaft der beteiligten Ebenen bleibt erhalten, auch wenn das Dreieck an einer anderen Stelle in μ liegt, da eine Möbiustranslation die zu μ gleichabständige Lage zweier Punkte erhält (siehe Bem. 3.2.23).

Die Schreibweise wird vereinfacht und verallgemeinert durch

Definition 3.5.2 Sind ABC ein Dreieck sowie g eine eigentliche Gerade in der Bildebene μ und W_α der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von α mit dem Umkreis von ABC , so ist die Ebene $\varepsilon(\alpha, g)$ definiert als

$$\varepsilon(\alpha, g) := g \vee s \text{ mit } (g \cap s) \neq \emptyset \text{ und } s \parallel s_{W_\alpha},$$

wobei $s_{W_\alpha} \in \mathcal{E}$ der Netzstrahl im Punkt W_α ist.

Mit $\overline{\varepsilon(\alpha, g)}$ wird die bzgl. μ gespiegelte Ebene $\varepsilon(\alpha, g)$ bezeichnet.

Analog für die Winkel β und γ .

Wir schreiben jetzt obige Spiegelungen in der neuen Schreibweise, der Vollständigkeit wegen auch für die Geraden h_B, g_B, h_C, g_C (siehe Satz 3.2.17). Dabei bedeutet sinngemäß das Zeichen $\tilde{}$ die Spiegelung an ε_α bzw. ε_β bzw. ε_γ :

$$\begin{aligned} h_A &= \varepsilon(A, b) \cap \varepsilon(B, c) &\rightarrow \tilde{h}_A &= \varepsilon(\alpha, c) \cap \overline{\varepsilon(\alpha, b)}, \\ g_A &= \varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(C, b) &\rightarrow \tilde{g}_A &= \varepsilon(\alpha, b) \cap \overline{\varepsilon(\alpha, c)}, \\ h_B &= \varepsilon(B, c) \cap \varepsilon(C, a) &\rightarrow \tilde{h}_B &= \varepsilon(\beta, a) \cap \overline{\varepsilon(\beta, c)}, \\ g_B &= \varepsilon(B, a) \cap \varepsilon(A, c) &\rightarrow \tilde{g}_B &= \varepsilon(\beta, c) \cap \overline{\varepsilon(\beta, a)}, \\ h_C &= \varepsilon(C, a) \cap \varepsilon(A, b) &\rightarrow \tilde{h}_C &= \varepsilon(\gamma, b) \cap \overline{\varepsilon(\gamma, a)}, \\ g_C &= \varepsilon(C, b) \cap \varepsilon(B, a) &\rightarrow \tilde{g}_C &= \varepsilon(\gamma, a) \cap \overline{\varepsilon(\gamma, b)}. \end{aligned}$$

Aus den sechs verschiedenen Ebenen auf der linken Seite der Pfeile wurden zwölf verschiedene Ebenen auf der rechten Seite derselben. Anders gesehen: die Punkte

$$\begin{aligned} O_1 &= \varepsilon(A, c) \cap \varepsilon(B, a) \cap \varepsilon(C, b), \\ O_2 &= \varepsilon(B, c) \cap \varepsilon(C, a) \cap \varepsilon(A, b) \end{aligned}$$

“vervielfältigen” sich in verschiedene Punkte M_1, M_2, M_3, \dots auf der einen Seite und N_1, N_2, N_3, \dots auf der anderen Seite der Bildebene μ als Schnitt je dreier Ebenen durch a, b und c unter den zwölf rechts der Pfeile.

Es ist ja $O_1 \vee O_2 = o$ und $o \cap \mu = L$ der Lemoinesche Punkt des Dreiecks ABC . Deswegen ergeben sich Fragen wie z.B.:

- (a) Welche Punkte sind die Schnitte von Geraden $M_i \vee N_j$ mit μ ?

(b) Welche Punkte sind die Netzprojektionen von M_i bzw. N_j ?

3.5.3 Für den Beweis des zentralen Satzes 3.2.20 dieser Arbeit über den Lemoineschen Punkt eines Dreiecks wurden zwei Tatsachen benutzt: der “Südpolsatz” (3.2.21) und der “Sehnentangentenwinkelsatz” (3.2.22). Es wäre wohl interessant und lohnenswert, auch für diese beiden Phänomene in der Ebene je ein Äquivalent zu finden, welches mit Hilfe des elliptischen Netzes \mathcal{E} innerhalb des projektiven Raumes $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ formuliert ist.

Literaturverzeichnis

- [1] N. Altshiller-Court. *Modern Pure Solid Geometry*. New York: Chelsea, 1964.
- [2] R. Bereis und H. Brauner. Schraubung und Netzprojektion. *Elemente Math.* 12, 33-40, 1957.
- [3] H. Havlicek. *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*. Heldermann Verlag, Lemgo, 2006.
- [4] R. Honsberger. *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*. The Mathematical Association of America, 1995.
- [5] C. Hopp. *Untersuchungen zu Dreieck, Viereck und Kreis in ihrer gegenseitigen Lage*. GRIN Verlag GmbH, München, 2010.
- [6] W.-D. Klix. Netzprojektion eines Tetraeders. *Elem. Math.* 23, 1968, 78-85.
- [7] Erwin Kruppa. Über die Mises'sche Abbildung räumlicher Kräftesysteme. *Z. angew. Math. Mech.* 4, 146-155 (1924).
- [8] H. Pottmann und J. Wallner. *Computational Line Geometry*. Springer, 2001.
- [9] T. Reye. *Die Geometrie der Lage*, 1. Abteilung, 6. Auflage. Alfred Kröner Verlag, Leipzig, 1923.
- [10] M. Salzert. Die Eigenschaften derjenigen Kollineationen, die zwei konjugiert imaginäre windschiefe Geraden im Raume festlassen. *Schriften des mathematischen Instituts und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin*, Bd. 5, Heft 2, 1940.
- [11] E.M. Schröder. *Vorlesungen ueber Geometrie, Band 1: Möbiussche, elliptische und hyperbolische Ebenen*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1991.
- [12] H-J. Stoss. *Einführung in die synthetische Liniengeometrie*. Verlag am Goetheanum, Dornach, 1999.
- [13] University of Crete. *Collection of Topics in Geometry*. www.math.uoc.gr/~pamfilos/eGallery/Gallery.html, 2011.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Das elliptische Netz \mathcal{E}	14
1.2	Beweis des Satzes 1.4.2; die Kollineation β	15
2.1	Netzbilder von Punkten	47
2.2	Netzbild einer Ebene	47
2.3	Netzbild einer Geraden	48
2.4	Bem. 2.2.19	53
2.5	Bem. 2.2.19	54
2.6	Satz 2.2.21, Bem. 2.2.22	55
2.7	Satz 2.2.23	56
2.8	Satz 2.2.24	57
2.9	Satz 2.2.27	58
2.10	Miquelsche Kreiskonfiguration	59
3.1	Satz 3.1.5	62
3.2	Beweis des Satzes 3.1.5	63
3.3	Satz 3.2.1	63
3.4	Satz 3.2.4	65
3.5	Satz 3.2.6, Bem. 3.2.8	66
3.6	Satz 3.2.9	67
3.7	Satz 3.2.10	68
3.8	Bem. 3.2.11	69
3.9	Satz 3.2.13, Satz 3.2.16	70
3.10	Satz 3.2.17	72
3.11	Satz 3.2.20	74

3.12	Südpolsatz	75
3.13	Hilfsatz 3.2.22	76
3.14	Beweis des Satzes 3.2.20; Ansicht von oben	77
3.15	Satz 3.2.25	78
3.16	Satz 3.3.1, Def. 3.3.2	80
3.17	Satz 3.3.3, Def. 3.3.4	82
3.18	Satz 3.3.5	83
3.19	Beweis des Satzes 3.3.5; Ansicht von oben	84
3.20	Bem. 3.3.7	85
3.21	Satz 3.3.9	86
3.22	Beweis des Satzes 3.3.9	87
3.23	Satz 3.3.11	88
3.24	Satz 3.3.13	90
3.25	Satz 3.3.14	91
3.26	Lemma 3.3.15	92
3.27	Lemma 3.3.15	93
3.28	Beweis des Satzes 3.3.14	94
3.29	Satz 3.4.3	96
3.30	Beweis des Satzes 3.4.3	97
3.31	Satz 3.4.4	98
3.32	Beweis des Satzes 3.4.4	99

Symbolverzeichnis

$\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_n)$	Zeilenvektor	$[M]$	Menge $\{tM \mid t \in \mathbb{C}^\times\}$ aller zu $\mu \in \Gamma(\mathbb{C})$ gehörenden Abb.-Matrizen
\mathbf{x}^T	Spaltenvektor		
$\mathbf{x}\mathbb{K}$	Punkt		
$\mathbf{u}^T\mathbb{K}$	Hyperebene		
\mathcal{E}	elliptisches Netz	$[M]_\kappa$	Menge $\{tM \mid t \in \mathbb{C}^\times\}$ aller zu $\mu \in \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$ gehörenden Abb.-Matrizen
\mathbb{C}_∞	reelle Möbiusebene		
g_0, g_1, g_i, g_∞	Netzstrahlen in $0, 1, i, \infty$		
\mathcal{S}	lineare Kongruenz	$M(\mathbb{C})$	Menge aller $[M]$
\bar{z}, \bar{M}	Konjugation in \mathbb{C}	$M_\kappa(\mathbb{C})$	Menge aller $[M]_\kappa$
$\Gamma(\mathbb{C})$	Gruppe der gleichsinnigen Möbius-Transformationen	$M_{\mathbb{C}}$	Gruppe $M(\mathbb{C}) \cup M_\kappa(\mathbb{C})$
$\Gamma_\kappa(\mathbb{C})$	Menge der gegensinnigen Möbius-Transformationen	$[\widehat{M}]$ $[\widetilde{M}]$	Menge $\{t\widehat{M} \mid t \in \mathbb{R}^\times\}$ Menge $\{t\widetilde{M} \mid t \in \mathbb{R}^\times\}$
$\Gamma_{\mathbb{C}}$	Gruppe $\Gamma(\mathbb{C}) \cup \Gamma_\kappa(\mathbb{C})$	$M(\mathcal{E})$	Menge aller $[\widehat{M}]$
$\widehat{M}, \widetilde{M}$	Matrizen $\in GL_4(\mathbb{R})$ als Erweiterung von $M \in GL_2(\mathbb{C})$	$M_\kappa(\mathcal{E})$ $M_{\mathcal{E}}$	Menge aller $[\widetilde{M}]$ Gruppe $M(\mathcal{E}) \cup M_\kappa(\mathcal{E})$
$\widehat{\mu}$	Menge der zu $t\widehat{M} \forall t \in \mathbb{C}^\times$ gehörenden Kollineationen	$\Gamma(\mathcal{E})$	Gruppe der gleichsinnigen \mathcal{E} -invarianten Kollineationen
κ	Konjugation in \mathbb{C}_∞	$\Gamma_\kappa(\mathcal{E})$	Menge der gegensinnigen \mathcal{E} -invarianten Kollineationen
$\widetilde{\kappa}$	zu κ gehörende Kollineation in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$		
$\widetilde{\mu}$	Menge der zu $t\widetilde{M} \forall t \in \mathbb{C}^\times$ gehörenden Kollineationen	$\Gamma_{\mathcal{E}}$	Gruppe $\Gamma(\mathcal{E}) \cup \Gamma_\kappa(\mathcal{E})$

s_P, s_ε	Netzstrahl $\in \mathcal{E}$ inzident mit Punkt P bzw. Ebene ε	$P \vee g$	Verbindungsebene des Punktes P mit der Geraden g
g_∞	unendlich ferner Punkt der Geraden g (ab Kapitel 2)	$P \vee Q$	Verbindungsgerade der Punkte P und Q
ν	elliptische Netzprojektion	$\varepsilon(G, g)$	Netzstrahlebene $g \vee s_G$
μ	Bildebene der elliptischen Netzprojektion (ab Kapitel 2)	\mathcal{H}_g	Ebenenbüschel mit Trägergerade g
$g \vee h$	Verbindungsebene der Geraden g und h	(L, l)	Linienelement einer Kurve in μ
		\bar{g}	Spiegelbild der Geraden g bzgl. μ

Sachverzeichnis

- Artzt-Parabel, 72
- Bildebene, 45
 - konform abgeschlossene, 46
 - projektiv abgeschlossene, 46
- Brocard-Dreieck
 - erstes, 83
 - zweites, 73
- Brocard-Gerade, 78
- Brocard-Kreis, 73
- Brocardscher Punkt
 - erster, 80
 - zweiter, 81
- Brocardscher Winkel, 82
- Cliffordsche Schiebung, 29
 - involutorische, 45
- Doppelverhältnis
 - in \mathbb{C}_∞ , 50
 - in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, 49
- Gruppe
 - harmonische hyperbolische, 94
- Involution
 - harmonische, 85
- Inzidenz
 - Punkt - Hyperebene, 5
- Kollineation, 5
 - axiale, 26
 - harmonische, 94
 - gegennnige, 26
 - gescharte, 9
 - involutorische, 12
 - gleichsinnige, 25
 - zentrale, 9
- Konjugation
 - harmonische, 94
- Koordinaten
 - homogene, 5
- Koordinatensystem
 - affines, 49
 - projektives, 5
 - projektives Standard-, 5
- Koordinatentransformation, 5
- Lemoinescher Punkt, 73
- lineare Kongruenz
 - elliptische, 10
 - hyperbolische, 10
 - parabolische, 10
- Linielement, 68
- Lotfußpunkt, 57
- Möbius-Transformation, 17
 - Dreh-Inversion, 22
 - Drehstreckung, 18
 - gegennnige, 17
 - gleichsinnige, 17
 - Gleit-Inversion, 21
 - Inversion, 20
 - elliptische, 23
 - Streck-Inversion, 20
 - Translation, 19
- Möbiusebene
 - Modell in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, 7
 - reelle, 6
- Möbiuskreis, 7
- Matrixoperator
 - \widehat{M} , 24
 - \widetilde{M} , 26
- Metrik, 46
- Miquelkreis, 58
- Miquelpunkt, 58
- Miquelsche Kreiskonfiguration, 57
- Netzbild
 - einer Ebene, 47
 - einer Geraden, 48
 - eines Netzstrahles, 31

- eines Punktes, 47
- Netzfluchtpunkt, 53
- Netzfluchtspur, 53
- Netzprojektion
 - elliptische, 48
- Netzstrahlebene, 60

- Orthogonalität, 46

- Parallelität, 46
- Projektion
 - Normal-, 61
 - stereographische, 7
- Projektivität
 - elliptische, 29

- Regelschar, 8

- Symmediane, 73

- Teilverhältnis, 49
 - in \mathbb{C} , 50
- Tetraeder, 58

- Vektorraum
 - Erweiterung, 6
- Verbindungsgerade, 5