März 1990

Stetige schwache Isotropie quadratischer Formen über $R(X_1,\dots,X_n)$, R ein reell abgeschlossener Körper

Seien $p_1,\dots,p_m \in \mathbb{Z}[C_1,\dots,C_k,X_1,\dots,X_n] =: \mathbb{Z}[\underline{C},\underline{X}]$,
$p_i \neq 0$, $\deg p_i \le M$, m gerade.

Die Formel $\forall X_1 \dots X_n \left(\bigwedge_1^m p_i(\underline{C},\underline{X}) \neq 0 \to \mathrm{sgn}_p \langle p_1(\underline{C},\underline{X}),\dots,p_m(\underline{C},\underline{X})\rangle = 0\right) =: \varphi(\underline{C})$

läßt sich in der Sprache der angeordneten Körper erststufig formulieren.

Ist R ein reeller Körper, so ist die Menge $\{\underline{c} \in R^k \mid R \models \varphi(\underline{c})\}$ abgeschlossen in R:

$$\{\underline{c} \in R^k \mid R \models \varphi(\underline{c})\} =$$

$$\{\underline{c} \in R^k \mid R \models \forall X_1 \dots X_n \Big(\bigwedge_1^m p_i(\underline{c},\underline{X}) \neq 0 \to \underbrace{\bigvee_{\substack{(k_1,\dots,k_m)\\ k_1<\dots<k_{\frac{m}{2}}\\ k_{\frac{m}{2}+1}<\dots<k_m\\ k_i \neq k_j \text{ für } i\neq j}} \Big(\bigwedge_1^{m/2} p_{k_i}(\underline{c},\underline{X}) \le 0 \wedge \bigwedge_{m/2+1}^{m} p_{k_i}(\underline{c},\underline{X}) \ge 0\Big)}_{\gamma(\underline{c},\underline{X})}\Big)\}$$

$$= \bigcap_{\underline{a}\in R^n} \{\underline{c} \in R^k \mid R \models \bigvee_1^m p_i(\underline{c},\underline{a}) = 0 \vee \gamma(\underline{c},\underline{a})\}$$

$$= \bigcap_{\underline{a}\in R^n} \Big[\bigcup_1^m \{\underline{c} \in R^k \mid p_i(\underline{c},\underline{a}) = 0 \text{ in } R\} \cup \bigcup_{\substack{(k_1,\dots,k_m)\\ \dots}} \Big(\bigcap_1^{m/2} \{\underline{c} \mid p_{k_i}(\underline{c},\underline{a}) \le 0\} \wedge \bigcap_{m/2+1}^{m} \{\underline{c} \mid p_{k_i}(\underline{c},\underline{a}) \ge 0\}\Big)\Big]$$

In der Theorie der reell abgeschlossenen Körper ist somit $\varphi(\underline{C})$ äquivalent zu einer Formel der Gestalt $\psi(\underline{C}) \equiv \bigvee_i \bigwedge_j q_{ij}(\underline{C}) \ge 0$, $q_{ij} \in \mathbb{Z}[\underline{C}]$.
(endl. viele Disjunktionen + Konjunktionen)

Ist R reell abgeschlossen, so gilt:

$R \models \delta(c)$ gdw. $(p_1(\underline{c}, \underline{X}), \ldots, p_m(\underline{c}, \underline{X}))$ ist Torsionsform in $W(R(\underline{X}))$ der Dimension m.

Sei nun R ein reell abgeschlossener Körper.

Wir setzen voraus: es gibt ein $\underline{c} \in R^k$ mit

$$(*) \qquad R \models \underbrace{\exists X_1 \dots X_n \bigwedge_1^m p_i(\underline{c}, \underline{X}) \neq 0 \wedge \varphi(\underline{c})}_{=:\, \delta(\underline{c})}$$

Dann gilt folgender $\boxed{D := \langle \mathbb{Z}[\underline{c}] \cup \{q_i ; q_i\} \rangle \text{ Ring. stetiger Fktnen}}$

Satz: Es gibt $f_{ij} \in D[\underline{X}]$ und $\alpha_{ij} \in D$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, N$, sodaß

$$p_1 (\alpha_{11} f_{11}^2 + \dots + \alpha_{1N} f_{1N}^2) + \dots + p_m (\alpha_{m1} f_{m1}^2 + \dots + \alpha_{mN} f_{mN}^2) \equiv 0,$$

wobei $\alpha_{ij}(\underline{c}) \geq 0$ und

$$\alpha_{11}(\underline{c}) f_{11}(\underline{c}, \underline{X})^2 + \dots + \alpha_{1N}(\underline{c}) f_{1N}(\underline{c}, \underline{X})^2 \neq 0$$

(%) für alle $\underline{c} \in \{\underline{c} \in R^k \mid R \models \delta(\underline{c})\}$ $(\neq \emptyset)$, für alle i, j.

Zum Beweis benötigen wir zwei Tatsachen:

Lemma: Sei A ein komm. Ring mit 1, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von A, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ ein minimales Primideal, $a \in \mathfrak{p}$. Dann gilt: es gibt ein $b \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $ab \in \operatorname{rad} \mathfrak{a}$.

Beweis: $V := \{ v a^n \mid v \in A \setminus \mathfrak{p}, n \in \mathbb{N} \}$ (mult. abg.)

Ann: $V \cap \operatorname{rad} \mathfrak{a} = \emptyset \Rightarrow$ es gibt ein Primideal $\mathfrak{p}' \supset \operatorname{rad} \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{p}' \cap V = \emptyset$ ($\mathfrak{p}'$ ist ein maxim. Ideal mit dieser Eigenschaft) $\Rightarrow a \notin \mathfrak{p}'$ $\Rightarrow \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$

Würde man $c \in \{c \in R^k / R \models \varphi(c)\}$ zulassen, so könnte $p_1(c, X) \equiv 0$ und somit die Darstellung der 0 trivial werden.

Für $c \in \{c \in R^k / R \models \varphi(c) \wedge \exists X_{11}, \dots, X_n \; p_1(c, X) \neq 0\}$ ist $\alpha_{11}(c) f_{11}(c, X)^2 + \dots + \alpha_{1N}(c) f_{1N}(c, X)^2 \equiv 0$ immer noch möglich, also ist $\{c \in R^k / R \models \delta(c)\}$ im Satz die größtmögliche Menge!

$x \notin \mathfrak{q} \Rightarrow xa \in V \Rightarrow xa \notin \mathfrak{q}' \Rightarrow x \notin \mathfrak{q}'$

Also $\mathfrak{q}' \subsetneqq \mathfrak{q}$ $\#$.

Somit gibt es ein $b \in A \setminus \mathfrak{q}$ mit $ba^n \in \operatorname{rad} \mathfrak{a}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow ba \in \operatorname{rad} \mathfrak{a}$.

$\square$

Repräsentationssatz (siehe Lam, "Orderings, Valuations, Quadr. F.")

Sei F ein Körper, S eine Präordnung von F, $b_1 \in F \setminus \{0\}$, $\phi := \langle a_1, \dots, a_n \rangle_S$ eine Diagonalform über S. $D_S(\phi) := \{\sum_1^n a_i s_i \neq 0 / s_i \in S\}$. Dann gilt:

$b_1 \in D_S(\phi)$ gdw. $\phi \cong_S \langle b_1, \dots, b_n \rangle_S$ für geeignete $b_2, \dots, b_n \in F \setminus \{0\}$.

["$\cong_S$" bedeutet "S-Isometrie": zwei Diagonalformen ϕ, ϕ' über S heißen S-isometrisch $:\Leftrightarrow$ ϕ und ϕ' haben gleiche Dimension und Signatur bzgl. aller Ordnungen P von F mit $P \supset S$.]

Beweis des Satzes:

Definieren stetige Funktionen

$\varrho_i : R^k \longrightarrow R$, $\varrho : R^k \longrightarrow R$

$\underline{a} \longmapsto \min_j \varrho_{ij}(\underline{a})$, $\underline{a} \longmapsto \max_i \varrho_i(\underline{a})$

Dann gilt: $R \models \psi(\underline{a}) \Leftrightarrow \varrho(\underline{a}) \geq 0$ in R

Sei $A := \langle \mathbb{Z}[\underline{C}, \underline{X}] \cup \{\varrho_i, \varrho\} \rangle$ Ring

$B := \left\{ \frac{a}{p_1^{\nu_1} \cdots p_m^{\nu_m}} \mid a \in A, \nu_i \in \mathbb{N} \right\}$ Lokalisierung von A bei den p_i.

$S := \langle B^2 \cup \{\varrho_{ij} - \varrho_i, \varrho - \varrho_i, \varrho\} \rangle$ Halbring.

Da die p_i keine Nullteiler in A sind, haben wir eine Einbettung $A \hookrightarrow B : a \longmapsto \frac{a}{1}$.

Wegen Voraussetzung (*) (Seite 2) ist $-1 \notin S$, S also eine Präordnung von B:

Ann: $-1 \in S \Rightarrow -1 = \sum (\varrho_{ij} - \varrho_i)^{\nu_j} (\varrho - \varrho_i)^{\mu_i} \varrho^{\alpha} b^2$

$$\Rightarrow -1 = \sum \underbrace{(\varrho_{ij} - \varrho_i)^{\nu_j}(\underline{c})}_{\geq 0} \underbrace{(\varrho - \varrho_i)^{\mu_i}(\underline{c})}_{\geq 0} \underbrace{\varrho(\underline{c})^{\alpha} b^2(\underline{c}, \underline{X})}_{\geq 0} \, !$$

für das in (*) existierende $\underline{c} \in R^k$.

Widerspruch zur Realität von $R(X_1, \ldots, X_n)$.

Sei $C := \frac{B}{1+S}$ die Lokalisierung von B bei $1+S$.

Dann ist $\frac{S}{1+S}$ ein quadratischer Halbring und

$T := \frac{S}{1+S} + \sum_2^m \frac{S}{1+S} \cdot a_i$, $a_i := p_1 p_i$, ein normierter $\frac{S}{1+S}$-Modul in C. (d.h.: $T + T \subset T$, $\frac{S}{1+S} T \subset T$, $1 \in T$)

Wir zeigen: $-1 \in T$.

Sei $\mathfrak{a} := \{a \in C \mid -a^2 \in T\}$

$\mathfrak{a}$ ist ein Ideal: $c \in C, a \in \mathfrak{a} \Rightarrow ca \in \mathfrak{a}$ ✓

$a, b \in \mathfrak{a} \Rightarrow -a^2, -b^2 \in T \Rightarrow -(a+b)^2 = (a-b)^2 - 2a^2 - 2b^2 \in T$

$\Rightarrow a+b \in \mathfrak{a}$.

Wir nehmen an: $\mathfrak{a} \subsetneq C$, und zeigen, daß dies zu einem Widerspruch führt.

Sei $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ ein minimales Primideal in C.

$K := \mathrm{Quot}(C/\mathfrak{p})$

Dann ist $\overline{\frac{S}{1+S}} \cap -\overline{\frac{S}{1+S}} = \{0\}$, also $\dfrac{\overline{\frac{S}{1+S}}}{\overline{\frac{S}{1+S}}} =: U$ eine Präordnung von K.

Begründung: Ann: es gibt $\bar{0} \neq \bar{x} \in \overline{\frac{S}{1+S}} \cap -\overline{\frac{S}{1+S}}$

$\Rightarrow$ es gibt $s, s' \in \frac{S}{1+S}$ mit $x-s, x+s' \in \mathfrak{p}$

$\Rightarrow s+s' \in \mathfrak{p}$

$\Rightarrow$ es gibt $b \in C \setminus \mathfrak{p}$ mit $b^2(s+s')^2 \in \mathrm{rad}\,\mathfrak{a}$
(Lemma)

$\Rightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $b^{2n}(s+s')^{2n} \in \mathfrak{a}$

$\Rightarrow -b^{4n}(s+s')^{4n} \in T$, $-b^{4n}(s+s')^{4n} = -b^{4n}(s^{4n}+s'')$, $s'' \in \frac{S}{1+S}$

$\Rightarrow -b^{4n}(s^{4n}+s'') + b^{4n}s'' = -(bs)^{4n} \in T$

$\Rightarrow (bs)^{2n} \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$

$\Rightarrow bs \in \mathfrak{p}$

$\Rightarrow s \in \mathfrak{p}$

$\Rightarrow x \in \mathfrak{p}$ ⨳

Unterscheiden zwei Fälle:

I) Für alle Ordnungen $Q \supset U$ von K ist
$\mathrm{sgn}_Q(\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_m) = 0$

II) Es gibt eine Ordnung $Q \supset U$ von K mit
$\mathrm{sgn}_Q(\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_m) \neq 0$.

Ad I: $\mathrm{sgn}_Q(\overline{p}_1, \dots, \overline{p}_m) = 0 \Rightarrow \mathrm{sgn}_Q(\overline{1}, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_m) = 0$
für alle $Q \supset U$. $\Rightarrow$
$\langle \overline{1}, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_m \rangle_U \cong_U \langle -\overline{1}, \overline{1}, \dots, -\overline{1}, \overline{1} \rangle_U \underset{\text{(Repr.-Satz)}}{\Longrightarrow}$
$-\overline{1} \in U + \sum_2^m U \cdot \overline{a}_i \Rightarrow$
es gibt $t \in T$, $s \in \frac{S}{1+S} \setminus \mathfrak{q}$ mit $t + s \in \mathfrak{q}$

$\underset{\text{(Lemma 2)}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, b \in C \setminus \mathfrak{q}$ mit $b^2(t+s) = t' + s' \in \mathrm{rad}\,\mathfrak{a}$,
$t' \in T$, $s' \in \frac{S}{1+S} \setminus \mathfrak{q}$.

$\Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}: (t'+s')^{2^n} = t'' + s'' \in \mathfrak{a}$, $t'' \in T$, $s'' \in \frac{S}{1+S} \setminus \mathfrak{q}$.
$\Rightarrow -(t''+s'')^2 = -t''^2 - 2s''t'' - s''^2 \in T$
$\Rightarrow -s''^2 \in T \Rightarrow s'' \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$ ⨳

Ad II: Sei L der reelle Abschluß von K bzgl. Q.
Die kanonische Funktion $B \to C \longrightarrow \overline{C} \hookrightarrow L$
bildet $f(\underline{C}, \underline{X}) \in \mathbb{Z}[\underline{C}, \underline{X}]$ ab auf $\overline{f(\underline{C}, \underline{X})} = f(\overline{\underline{C}}, \overline{\underline{X}}) \in \mathbb{Z}[\overline{\underline{C}}, \overline{\underline{X}}]$
Wegen $\frac{\overline{S}}{1+\overline{S}} \subset U \subset Q \subset L^2$ gilt in L:
$\prod_j (\overline{\varrho}_{ij} - \overline{\varrho}_i) = 0$, weil $\prod_j (\varrho_{ij} - \varrho_i) = 0$ in B,
also $\overline{\varrho}_{ij} = \overline{\varrho}_i$ für ein j, $\overline{\varrho}_{ij} \geq \overline{\varrho}_i$ für alle j.

$\prod_i (\bar{q} - \bar{q}_i) = 0$, weil $\prod_i (q - q_i) = 0$ in B,

also $\bar{q} = \bar{q}_i$ für ein i, $\bar{q} \geq \bar{q}_i$ für alle i.

$\bar{q} \geq 0$ in L, weil $q \in S$.

Damit gilt in L: $0 \leq \bar{q} \overset{!}{=} \max_i \min_j \bar{q}_{ij} =$

$\max_i \min_j q_{ij}(\underline{\bar{C}}) \iff 0 \leq \bigvee_i \bigwedge_j q_{ij}(\underline{\bar{C}})$

und andererseits nach Voraussetzung:

$\mathrm{sgn}_{L^2}(p_1(\underline{\bar{C}}, \underline{\bar{X}}), \ldots, p_m(\underline{\bar{C}}, \underline{\bar{X}})) \neq 0$. $\#$

Also ist $\mathfrak{A} = C$ und somit $-1 \in T$

d.h. $-1 = \frac{s_1}{1+s_1'} + \sum_2^m \frac{s_i}{1+s_i'} p_1 p_i$, $s_i, s_i' \in S$

$\Rightarrow -1 = \frac{u_1 + \sum_2^m u_i p_1 p_i}{1+s}$, $s, u_i \in S$

$\Rightarrow$ es gibt ein $v \in S$ mit $(1+v)(1+s+u_1+\sum_2^m u_i p_1 p_i) = 0$

$\Rightarrow (1+v')p_1 + \sum_2^m u_i' p_i = 0$, $v', u_i' \in S$.

$\blacksquare$

Juni 1990

2. Beweis

Q_i; Q, A, B, S, C, T seien wie im 1. Beweis.

Ann: $-1 \notin T$, T maximal $\Rightarrow$

$T \cap -T$ ist Primideal von C (und $\frac{S}{1+S}$-reell)
(siehe Lemma).

$$K := \mathrm{Quot}(C/T\cap -T) \Rightarrow$$

$$\frac{\overline{\frac{S}{1+S}}}{\overline{\frac{S}{1+S}}} =: U \text{ ist Präordnung von } K \text{ und}$$

$$\frac{\overline{T}}{\overline{\frac{S}{1+S}}} \text{ ist anisotroper } U\text{-Modul in } K:$$

[$0 \neq \bar{x} \in \overline{\frac{S}{1+S}} \cap -\overline{\frac{S}{1+S}} \Rightarrow x - \frac{s_1}{1+s_2},\ x + \frac{s_1'}{1+s_2'} \in T \cap -T$

für gewisse $s_i, s_i' \in S \Rightarrow \frac{s_1'}{1+s_2'} + \frac{s_1}{1+s_2} \in T \cap -T$

$\Rightarrow \frac{s_1'}{1+s_2'} \in T \cap -T \Rightarrow x \in T \cap -T \Rightarrow \bar{x} = 0$ $\lightning$.

$\bar{0} \neq \bar{x} \in \frac{\overline{T}}{\overline{\frac{S}{1+S}}} \cap -\frac{\overline{T}}{\overline{\frac{S}{1+S}}} \Rightarrow \bar{x}\,\overline{\frac{s_1}{1+s_2}} = \bar{t}_1,\ -\bar{x}\,\overline{\frac{s_1'}{1+s_2'}} = \bar{t}_2$

$\Rightarrow \bar{x}\,\overline{\frac{s_1}{1+s_2}}\,\overline{\frac{s_1'}{1+s_2'}} \in \overline{T} \cap -\overline{T} = \{0\}$ $\lightning$

($0 \neq \bar{x} \in \overline{T} \cap -\overline{T} \Rightarrow x-t,\ x+t' \in T \cap -T \Rightarrow$
$(x-t)+t = x \in T,\ (-x-t')+t' = -x \in T \Rightarrow$
$x \in T \cap -T \Rightarrow \bar{x} = 0$ $\lightning$)

Sei $\mathcal{T} \supset \frac{\overline{T}}{\overline{\frac{S}{1+S}}}$ maximaler anisotroper U-Modul.

Dann ist $\mathcal{T}$ also eine U-Semiordnung von K.

Es gilt: $1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n \in T$.

Zwei Fälle:

I) Für alle Ordnungen $Q \supset U$ von K ist $\operatorname{sgn}_Q(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n) = 0$

II) Gegenteil.

<u>Ad I:</u> $\operatorname{sgn}_Q(\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n) = 0 \Rightarrow \operatorname{sgn}_Q(1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = 0$
für alle $Q \supset U \Rightarrow (1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) \cong_U (-1, 1, \dots, -1, 1)$
$\overset{(14.9)}{\Longrightarrow} \operatorname{sgn}_S(1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n) = 0$ für alle normierten
U-Semiordnungen S von $K \Rightarrow \lightning$

<u>Ad II:</u> wie bisher. $\Rightarrow \lightning$.